Numéro d'Ordre au C. N. R. S.
A O 7780

THÈSE

PRESENTÉE

A L'UNIVERSITÉ DE PROVENCE

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

(Mécanique)

PAR

ROBERT PELISSIER

MOUVEMENT PSEUDO-PERIODIQUE D'UNE COLONNE LIQUIDE - CRITERES DE TRANSITION

Soutenue le 23 Novembre 1972, devant la Commission d'Examen :

Jury	MM. J. VALENSI	Président
	P. CASAL	
	Mlle C. CLARION	Examinateurs
	M. Th. VOGEL	

Numéro d'Ordre au C. N. R. S.
A O 7780

THÈSE

PRESENTEE

A L'UNIVERSITÉ DE PROVENCE

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

(Mécanique)

PAR

ROBERT PELISSIER

MOUVEMENT PSEUDO-PERIODIQUE D'UNE COLONNE LIQUIDE - CRITERES DE TRANSITION

Soutenue le 23 Novembre 1972, devant la Commission d'Examen :

Jury
- MM. J. VALENSI — Président
- P. CASAL
- Mlle C. CLARION — Examinateurs
- M. Th. VOGEL

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Université de Provence

U.E.R. Scientifiques

Président : F. BOREL

Secrétaire général : C. MOYNAULT

PROFESSEURS

MM.	J. VALENSI	Mécanique expérimentale des fluides
	P. ROUARD	Physique générale
	P. DESNUELLE	Chimie biologique
	M. MERIGOUX	Physique industrielle
	C. FEHRENBACH	Astronomie
	A. FAVRE	Mécanique de l'atmosphère et météorologie
	A. GUILLEMONAT	Chimie industrielle
	G. CARPENI	Chimie
	Y. DOUCET	Physique
	JM. SOURIAU	Méthodes mathématiques de la physique
	J. METZGER	Chimie
	L. FOURES	Mathématiques
	D. MALE	Physique
	G. BODIOU	Mathématiques appliquées
	M. NAUDET	Chimie des corps gras
	P. BOUSQUET	Physique
	P. PESTEIL	Physique
	P. CASAL	Mécanique rationnelle et appliquée
	G. GOUVERNET	Géologie appliquée
	A. VISCONTI	Physique théorique
	A. BLANCHARD	Mathématiques générales
	M. DUSSARDIER	Physiologie animale
	P. QUEZEL	Botanique
	A. JULG	Chimie théorique
	S. TAXY (Mme)	Géologie historique
	F. TESSIER	Géologie générale

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41545827_0001

ML. FURNESTIN (Mme)	Biologie animale
M. BERTRAND	Chimie
J. TROMPETTE	Physique
M. LAFFITTE	Chimie
R. FRAISSE	Mathématiques
C. BLANCHARD (Mme)	Mathématiques
R. NEGRE	Biologie végétale
R. COULON	Physique
R. KERN	Minéralogie
L. SIDERIADES	Physique
JM. SURZUR	Chimie organique
H. CHANTREL	Physique de l'espace
J. SOUGY	Géologie
J. HERVE	Electronique
H. BODOT	Chimie
J. CHOUTEAU	Physiologie animale
R. PHILIP	Physique
L. CAPELLA	Minéralogie
P. BILLARD	Mathématiques
M. BONNEAU	Mathématiques
JC. TRAYNARD	Chimie industrielle
C. CLARION (Mlle)	Mécanique des fluides
A. PONS	Botanique
A. GIRARDIE	Zoologie
J. MANDELBROJT	Physique
M. BIZOUARD	Physique
JP. DAVID	Physique
JC. MAIRE	Chimie
M. SIMON	Physiologie animale
G. MARCHIS-MOUREN	Chimie biologique
R. PETIT	Physique
M. HUGON	Psycho-physiologie

PROFESSEURS SANS CHAIRE

R.	AMAR	Zoologie
L.	DEVEZE	Biologie marine
F.	BOREL	Techniques mathématiques de la physique
R.	CHANDEBOIS (Mlle)	Biologie animale
H.	GUENOCHE	Mathématiques appliquées
J.	HENNEQUIN	Electronique
S.	GUEIRARD (Mlle)	Pétrographie
C.	FEUGEAS	Chimie
J.	CABANE	Chimie
G.	RASIGNI	Physique
S.	COMBET	Chimie
R.	GARRON	Physique expérimentale
M.	CADILHAC	Physique
B.	WAEGELL	Chimie
M.	PICHENOT (Mlle)	Biologie végétale
M.	GILLET	Physique
L.	SARDA	Biochimie
C.	ROMAN	Physiologie animale
A.	GILLET	Mathématiques
S.	MARTINUZZI	Physique

MAITRES DE CONFERENCES

H.	PATIN	Chimie
J.	CRESP	Biologie animale
M.	BENARROCHE	Physique
H.	TACHOIRE	Chimie
E.	VINCENT	Chimie
L.	VINCENTE	Biologie animale
J.	MANUCEAU	Mathématiques
R.	GUERMEUR	Physique
M.	DELAAGE	Biochimie
F.	CATZIGRAS (Mlle)	Géologie

M.	SIRUGUE (Mme)	Physique
H.	MERDY	Physique
L.	PUJOL	Chimie
A.	LAVAGNE	Biologie végétale
J.	GIUDICELLI	Biologie animale
M.	FOUGEREAU	Biochimie
G.	NOAT	Physiologie végétale
R.	BOUDET	Mathématiques
R.	STREIFF	Chimie
JP.	BELAICH	Microbiologie
P.	NEVILLE	Biologie végétale
JP.	SOUBLIN	Mathématiques
S.	DELACHE (Mme)	Mathématiques
A.	CASALOT	Chimie
M.	MOULINS	Biologie générale
J.	DETRAZ	Mathématiques
R.	PUJOL	Psycho-physiologie
B.	MARTINET	Mathématiques
G.	FARDOUX	Chargé d'enseignement-Mathématiques

A mon Maître,

Melle C. Clarion, Professeur

Hommage respectueux et
reconnaissant.

A ma femme,

A mon fils,

A mes parents,

A V A N T - P R O P O S

L'objet du présent mémoire est l'étude du mouvement pseudo-périodique d'une colonne liquide. De nombreux travaux sur ce sujet ont déjà été effectués de 1947 à 1955 au sein de l'Institut de Mécanique des Fluides par M. J. Valensi et Melle C. Clarion. Ils concernent en particulier le calcul et la mise en évidence de différents régimes d'écoulements. Il nous a semblé intéressant de les reprendre et de les poursuivre par une étude complète, théorique et expérimentale, de la distribution des vitesses et des conditions de transition.

Cette étude m'a été confiée par Melle C. Clarion, Professeur à l'Université de Provence, à qui je dois le meilleur de ma formation scientifique. Qu'il me soit permis de lui exprimer tous mes remerciements et toute ma gratitude pour ses encouragements, son aide constante et ses conseils éclairés.

Que M. J. Valensi, Directeur de l'Institut de Mécanique des Fluides, trouve ici l'expression de ma vive reconnaissance pour ses encouragements et la confiance qu'il m'a témoignée en me permettant de réaliser ce travail au sein du laboratoire.

Qu'il me soit permis d'exprimer mes vifs remerciements à M. Th. Vogel, Directeur du Centre de Recherches Physiques et à M. P. Casal, Professeur à l'Université de Provence, qui ont bien voulu accepter d'être membres du Jury et qui m'ont donné de précieux conseils au cours de la rédaction de cette thèse.

Je désire également exprimer ma reconnaissance à Mme J. Fauchas, Collaborateur technique à l'Education Nationale, qui s'est chargée de l'établissement des programmes de calcul, et à Mme M. Siouffi, Assistante à l'Université de Provence, et M. G. Salaun-Penquer, Ingénieur au C.N.R.S., qui m'ont prêté aimablement leur concours lors des réalisations expérimentales.

Je remercie aussi toutes les personnes de l'Institut de Mécanique des Fluides qui ont contribué à la réalisation de ce travail et en particulier : Melle S. Adjedj, Mme P. Dos Santos, M. G. Molinard, M. G. Soleillant.

TABLE des MATIERES

CHAPITRE I

INTRODUCTION ET EXPOSE DES RECHERCHES ANTERIEURES

	pages
I.1. Introduction	1
I.2. Exposé des recherches antérieures	2
I.2.1. Recherches antérieures sur le mouvement oscillatoire libre	2
I.2.2. Recherches sur le mouvement oscillatoire entretenu	7
I.3. Présentation du travail	12

CHAPITRE II

SOLUTIONS DES EQUATIONS DU MOUVEMENT

II.1. Equations du mouvement	14
II.2. Résolution des équations du mouvement	19
II.3. Détermination de $\frac{\omega_n}{\omega_p}$	20
II.3.1. Equation donnant $\frac{\omega_n}{\omega_p}$	20
II.3.2. Discussion et calcul des racines de l'équation II.6	21
II.4. Détermination de B_n	27
II.4.1. Régime oscillatoire	29
II.4.2. Régime apériodique	36
II.4.3. Etude du cas limite $\nu \to 0$	37
II.4.4. Remarques sur les équations (II.13), (II.14), (II.15) et (II.16)	39

II.5. Etude de l'amortissement (régime oscillatoire) 40

CHAPITRE III

RESULTATS THEORIQUES

III.1. Calcul de $\frac{\Omega}{\omega_p}$ et $\frac{\lambda_n}{\omega_p}$ 41

III.1.1. $\mathcal{V} \leqslant \mathcal{V}^*$ (solutions apériodiques) 42

III.1.2. $\mathcal{V} > \mathcal{V}^*$ (solutions oscillatoires) 43

III.2. Vitesse instantanée 44

III.2.1. Régime apériodique ($\mathcal{V} \leqslant \mathcal{V}^*$) 44

III.2.2. Régime oscillatoire($\mathcal{V} > \mathcal{V}^*$) 45

III.3. Couche limite 50

III.3.1. Variation de $\frac{\delta}{R}$ en fonction de Ωt pour une valeur de $\mathcal{V}$ donnée 50

III.3.2. Variation de $\frac{\delta}{R}$ en fonction de $\mathcal{V}$ pour une valeur de Ωt donnée 50

III.3.3. Variation de $\frac{\delta}{R}$ en fonction de Ωt et de $\mathcal{V}$ 52

III.3.4. Lois de variation de l'épaisseur de la couche limite 53

III.4. Vitesse moyenne dans une section à l'instant t 53

III.5. Calcul du vecteur tourbillon 54

III.6. Coefficient de frottement 56

III 6.1. Définitions 56

III.6.2. Calcul du coefficient de frottement instantané 57

III.6.3. Calcul du coefficient de frottement moyen 59

III.7. Calcul de l'amortissement 61

III.8. Existence de différents régimes d'écoulement 61

CHAPITRE IV

ETUDE EXPERIMENTALE

IV.1. Description des appareils et caractéristiques des liquides utilisés 64

IV.1.1. Description des appareils 64

IV.1 2. Caractéristiques des liquides utilisés 68

IV.2. Etude expérimentale de la distribution des vitesses 69

IV.2.1. Principe et méthode expérimentale 69

IV.2 2 Enregistrements de vitesse 70

IV.2.3. Résultats expérimentaux 71

IV.3. Couche limite 88

IV.4. Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux 90

CHAPITRE V

ETUDE DE LA STABILITE DE L'ECOULEMENT

V.1. Introduction 92

V.2. Critère de la stabilité 95

V.3. Etude théorique de la stabilité 105

V.3.1 Equations de base 105

V.3.2. Conditions aux limites et conditions initiales 107

V.3.3. Méthode de calcul 108

V.3.4. Energie cinétique moyenne de base et
énergie cinétique moyenne des perturbations 112

V.3.5. Résultats obtenus et discussion 113

V.4. Etude expérimentale de la stabilité 119

V.4.1. Appareils et liquides utilisés 120

V.4.2. Résultats expérimentaux 120

CONCLUSION 126

ANNEXE I 127

ANNEXE II

BIBLIOGRAPHIE

LISTE DES SYMBOLES

Symboles généraux

$A = \frac{h_o}{h_1}$	Amortissement
a_o	Fonction du paramètre $\mathcal{V}$ et de Ωt
a_1	Fonction du paramètre $\mathcal{V}$ et de Ωt
$\overline{C_f}$	Coefficient de frottement moyen
C_{fi}	Coefficient de frottement instantané
$E_p(\omega_p t)$	Energie cinétique moyenne des perturbations par longueur d'onde
$E_b(\omega_p t)$	Energie cinétique moyenne de l'écoulement de base par longueur d'onde
g	Accélération de la pesanteur
h_o	Dénivellation initiale de la colonne fluide
h_1	Dénivellation de la colonne fluide à la fin de la première oscillation
$(\frac{h_o}{R})_{c_1}$	Valeur critique de $\frac{h_o}{R}$ telle que si $\frac{h_o}{R} > (\frac{h_o}{R})_{c_1}$ l'écoulement est localement perturbé durant la première descente de la colonne fluide
$(\frac{h_o}{R})_{c_2}$	Valeur critique de $\frac{h_o}{R}$ telle qui si $\frac{h_o}{R} > (\frac{h_o}{R})_{c_2}$ l'écoulement est turbulent durant toute la première descente de la colonne fluide
$(\frac{h_o}{R})_{c_3}$	Valeur critique de $\frac{h_o}{R}$ telle que si $\frac{h_o}{R} > (\frac{h_o}{R})_{c_3}$ des tourbillons apparaissent au-dessus de la surface de séparation

$(\frac{h_o}{R})_\ell$ — Valeur critique de $\frac{h_o}{R}$ telle que si $\frac{h_o}{R} > (\frac{h_o}{R})_\ell$ un tourbillon apparait au voisinage de la surface libre

h_t — Ordonné moyenne instantanée de ménisque

J_o — Fonction de Bessel d'ordre zéro

J_1 — Fonction de Bessel d'ordre un

$k = \alpha R$ — Nombre d'onde adimensionnel

ℓ — Longueur de la colonne fluide

m — Masse effective apparente

M — Masse de la colonne fluide

P — Pression statique

$P^* = P + \rho g z \quad (P'^* = \frac{P+\rho g z}{\rho(\omega_p h_o)^2})$

q — Vitesse de déplacement du charriot

R — Rayon du tube

r — Distance radiale $(r' = \frac{r}{R})$

t — Temps $(t' = \omega_p t)$

$T = \frac{2\pi}{\Omega}$ — Pseudo-période du mouvement oscillatoire

U — Composante radiale de la vitesse de l'écoulement de base $(U' = \frac{U}{\omega_p h_o})$

u — Composante radiale de la vitesse de perturbation $(u' = \frac{u}{\omega_p h_o})$

v	Composante azimutale de la vitesse de perturbation $(v' = \frac{v}{\omega_p h_o})$
V	Tension aux bornes du film chaud
$\mathcal{V} = \frac{\omega_p R^2}{\nu}$	Paramètre de similitude mis en évidence par J. Valensi
$\mathcal{V}^*$	Valeur critique du paramètre $\mathcal{V}$ séparant l'écoulement apériodique de l'écoulement oscillatoire
$\mathcal{V}_c$	Valeur critique du paramètre $\mathcal{V}$ séparant les deux régimes théoriques d'oscillation
w	Composante axiale de la vitesse de perturbation $(w' = \frac{w}{\omega_p h_o})$
W	Composante axiale de la vitesse instantanée de l'écoulement de base $(W' = \frac{W}{\omega_p h_o})$
W_m	Vitesse moyenne instantanée
x_m^o	Zéros de la fonction de J_o
z	Coordonnée axiale $(z' = \frac{z}{R})$

Symboles grecs

α	Nombre d'onde
α_m	Fonction du paramètre $\mathcal{V}$
β_m	Fonction du paramètre $\mathcal{V}$
$\delta = R - r_\ell$	Epaisseur de la couche limite

η	Composante du vecteur tourbillon
Θ	Coordonnée angulaire d'un point
λ_n	Facteur d'amortissement du $n^{ième}$ partiel
μ	Coefficient de viscosité dynamique du fluide
ν	Coefficient de viscosité cinématique du fluide
ρ	Masse volumique du fluide
ψ	Variable intermédiaire définie dans le texte
ω	Coefficient de sur relaxation
$\omega_p = \frac{2g}{\ell}$	Fréquence d'oscillation si le fluide est supposé parfait
Ω	Fréquence réelle d'oscillation

C H A P I T R E I

I.1. INTRODUCTION

L'objet du présent mémoire est l'étude théorique et expérimentale du mouvement oscillatoire libre d'un fluide visqueux.

Ce mouvement instationnaire, bien représenté par le mouvement dans un tube en U de section droite circulaire de rayon R d'une colonne liquide de longueur ℓ écartée de sa position d'équilibre d'une hauteur h_o puis brusquement libérée à l'instant t = 0, correspond à une classe particulière des mouvements oscillatoires de fluides réels.

Dans cette catégorie d'écoulements c'est le mouvement oscillatoire entretenu d'un fluide visqueux dans un tube cylindrique et circulaire qui a fait l'objet du plus grand nombre de travaux théoriques et expérimentaux, les résultats de ces travaux étant souvent utilisés pour déterminer les caractères de l'écoulement du sang dans les artères, principalement la forme du profil des vitesses et les conditions d'existence possible d'un écoulement turbulent.

Si pour le mouvement oscillatoire entretenu le caractère non permanent se limite au fait que l'écoulement est périodique, on doit dans l'étude du mouvement oscillatoire libre tenir compte de la mise en mouvement de la colonne fluide et de l'amortissement des oscillations ; on se heurte par suite à des difficultés beaucoup plus grandes que celles que l'on rencontre dans l'étude du mouvement oscillatoire entretenu ; on doit remarquer cependant, en ce qui concerne l'écoulement du sang dans les artères, que le schéma de l'écoulement libre, sans être excellent, parait être plus satisfaisant que celui de l'écoulement forcé.

L'analyse d'une étude expérimentale des oscillations libres d'une colonne liquide dans un tube en U effectuée en 1911 par M. Menneret[21] a conduit J. Valensi à mettre en évidence le paramètre de similitude $\mathcal{V} = \frac{R^2 \omega_p}{\nu}$, où ν désigne le coefficient de viscosité

cinématique du fluide, $\omega_p = \sqrt{\frac{2g}{\ell}}$ la pulsation naturelle qu'aurait la colonne en l'absence de tout effet de viscosité.

L'étude théorique et expérimentale du mouvement oscillatoire libre d'une colonne fluide, entreprise dès 1947 sous la direction de J. Valensi[1 à 20] à l'Institut de Mécanique des Fluides de Marseille et poursuivie, entre autres, par l'étude du mouvement oscillatoire propre d'une sphère suspendue élastiquement dans un liquide, a confirmé la validité de ce paramètre.

Nous allons principalement analyser cette étude au cours de l'exposé des recherches antérieures.

I.2. EXPOSE DES RECHERCHES ANTERIEURES

Nous analysons les études théoriques et expérimentales antérieures relatives au mouvement oscillatoire libre d'un fluide visqueux. Nous citons ensuite quelques uns des travaux relatifs au mouvement oscillatoire entretenu.

I.2.1. Recherches antérieures sur le mouvement oscillatoire libre

Nous mentionnons d'abord les travaux de D.G. Christopherson et autres [22] (1938), J. Valembois[23] (1946), travaux analysés dans la référence (13).

I.2.1.1. Travaux de Menneret[21] (1911)

L'étude expérimentale des oscillations libres d'une colonne liquide dans un tube en U, effectuée avec des colonnes de longueur et de rayons différents, de très nombreux liquides et des amplitudes initiales variées, a conduit Menneret à conclure à l'existence de deux régimes d'oscillations périodiques et amortis suivant la valeur du rapport $A = \frac{h_o}{h_1}$, où h_o est l'amplitude initiale h_1 l'amplitude à la fin de la première oscillation complète.

Dans le premier régime, assimilé au régime laminaire de Poiseuille et défini par $A > 5$, A est indépendant de h_o.

Dans le deuxième régime, assimilé au régime turbulent et défini par $A < 1{,}85$, A est fonction de h_o. Toutefois on peut considérer que l'amortissement est encore indépendant de h_o dans le cas d'amplitudes initiales très faibles, car lorsque h_o tend vers zéro, A tend vers une valeur limite A_o.

I.2.1.2. Travaux effectués à l'Institut de Mécanique des Fluides de Marseille sous la direction de J. Valensi[1 à 20] (1947-1955)

L'expression de la vitesse axiale W(r,t) du mouvement oscillatoire libre dans un tube en U, est obtenue en négligeant la vitesse radiale et en supposant l'écoulement laminaire :

$$W(r,t) = -iC \left[1 - \frac{J_o\left(\frac{r}{R}\sqrt{-i\frac{\omega}{\omega_p}}\,\upsilon\right)}{J_o\sqrt{-i\frac{\omega}{\omega_p}}\,\upsilon} \right] e^{i\omega t} \qquad (I.1)$$

L'équation du mouvement de la colonne oscillante prise dans son ensemble conduit à l'équation :

$$\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2 = 1 - \frac{2}{\sqrt{-i\frac{\omega}{\omega_p}}\,\upsilon} \frac{J_1\sqrt{-i\frac{\omega}{\omega_p}}\,\upsilon}{J_o\sqrt{-i\frac{\omega}{\omega_p}}\,\upsilon} \qquad (I.2)$$

qui admet une infinité de racines

En posant

$$\frac{\omega}{\omega_p} = \pm\frac{\Omega}{\omega_p} + i\frac{\lambda}{\omega_p}$$

avec λ le facteur d'amortissement des partiels

$T = \frac{2\pi}{\Omega}$ leur pseudo-période

On a

a) pour $0 < \mathcal{V} \leqslant 3{,}42$

une infinité de racines purement imaginaires.

avec pour $n \geqslant 2$, approximativement

$$\frac{\lambda_n}{\omega_p} = -\frac{(n\pi - \frac{\pi}{4})^2}{\mathcal{V}}$$

b) pour $\mathcal{V} > 3{,}42$

deux racines complexes de la forme $\pm \frac{\Omega}{\omega_p} + i \frac{\lambda_1}{\omega_p}$, dont l'expression approximative est, lorsque $\mathcal{V} > 64$

$$\pm (1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{V}^{-\frac{1}{2}}) + \frac{i}{\sqrt{2}} \mathcal{V}^{-\frac{1}{2}}$$

et une infinité de racines purement imaginaires $\frac{\lambda_2}{\omega_p}, \ldots\ldots \frac{\lambda_n}{\omega_p}$ pour $n \geqslant 2$, on a approximativement

$$\frac{\lambda_n}{\omega_p} = \frac{(n\pi - \frac{\pi}{4})^2}{\mathcal{V}}$$

L'étude expérimentale, effectuée par C. Clarion, concerne la mesure de l'amortissement et de la période des oscillations ainsi que la visualisation de l'écoulement, effectuée par une méthode originale dite des "surfaces de séparation".

Les résultats obtenus montrent que, pour une valeur donnée du paramètre de similitude $\mathcal{V}$, la période des oscillations $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ est indépendante de l'amplitude ; par contre, si l'amortissement (rapport de deux élongations successives) est indépendant de l'amplitude lorsque $\mathcal{V} < 70$ il est fonction de l'amplitude lorsque $\mathcal{V} > 70$. Dans ce dernier domaine la valeur limite de l'amortissement lorsque l'amplitude tend vers zéro est déterminée sur les enregistrements.

On est ainsi conduit à distinguer trois régimes possibles d'oscillation

Premier régime $3{,}42 < \mathcal{V} \leqslant 25$

a) le profil des vitesses théorique à l'instant $\Omega t = \frac{\pi}{2}$ est du type parabolique.

Le Profil des élongations donné par l'expérience est aussi à l'instant $\Omega t = \frac{\pi}{2}$ du type parabolique.

b) l'expression théorique de $\frac{\lambda}{\omega_p}$ en fonction de $\mathcal{V}$ est

$$\frac{\lambda}{\omega_p} = 2{,}5\, \mathcal{V}^{-0{,}9}$$

Les valeurs expérimentales de $\frac{\lambda}{\omega_p}$ sont en excellent accord avec les valeurs théoriques correspondantes.

Deuxième régime $\mathcal{V} > 70$

a) le profil des vitesses théorique à l'instant $\Omega t = \frac{\pi}{2}$ est du type Richardson, il en est de même du profil des élongations à l'instant $\Omega t = \frac{\pi}{2}$, donné par l'expérience.

b) l'expression théorique de $\frac{\lambda}{\omega_p}$ en fonction de $\mathcal{V}$ est

$$\frac{\lambda}{\omega_p} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, \mathcal{V}^{-\frac{1}{2}}$$

en excellent accord avec les valeurs expérimentales (on remarque que, comme pour le premier régime, seuls les deux termes pseudo-périodiques sont pris en considération).

Régime intermédiaire

Aucun calcul n'a été effectué pour ce régime, en ce qui concerne le coefficient d'amortissement.

Cependant la théorie montre que le profil Richardson se substitue au profil parabolique pour $\mathcal{V} = 25$. Cette valeur est bien corroborée par l'expérience.

Ces résultats expérimentaux ont été confirmés par M. Borel[18]. Son étude (1970) concerne la mesure de la période et de l'amortissement des oscillations effectuée avec des moyens d'investigation différents, ainsi que la visualisation par la méthode des surfaces de séparation, non plus limitée à l'instant $\Omega t = \frac{\pi}{2}$, mais étendue à tout l'écoulement. Cette visualisation met en particulier en évidence le caractère original de la première montée.

I.2.1.3. Travaux de J.F. Ury[24] et [25] (1962 et 1964)

En écrivant les équations de Navier-Stokes, et l'équation globale du mouvement, et en introduisant une masse effective apparente $m = \delta^2 M$ ($\delta > 1$), où M désigne la masse de la colonne fluide, J.F. Ury[24] a établi des relations permettant le calcul de l'amortissement et du coefficient de frottement. Son paramètre de similitude a_o est relié au paramètre $\mathcal{V}$ par la relation $a_o \mathcal{V} = \delta$. Il a montré que l'écoulement peut être turbulent si certaines conditions reliant la valeur de l'amplitude initiale h_o et le nombre de Reynolds cinétique $R_k = \frac{D\sqrt{2e_k}}{\nu}$, où e_k désigne l'énergie cinétique par unité de masse, sont satisfaites. L'étude expérimentale de l'amortissement lui a permis de justifier les précédents résultats.

Dans une étude ultérieure [25] l'auteur a établi une méthode graphique de construction des profils de vitesse (module et déphasage) en utilisant les propriétés des fonctions de Bessel.

I.2.1.4. Travaux de P. Lambossy et A. Giornelli[26] (1958)

En considérant le mouvement global de la colonne fluide P. Lambossy et A. Giornelli ont établi une expression générale permettant le calcul de la pseudo-période et de décrément logarithmique des oscillations valable quelle que soit la valeur du paramètre ϑ. Ils ont montré que les deux régimes d'oscillation mis en évidence par Menneret ne sont que deux cas extrêmes d'un phénomène continu.

I.2.1.5. Travaux de A et J. Huetz [27] (1959) et travaux de T.M. Abramovitch et A.E. Kravtchenko[28] (1968)

Ces auteurs tiennent compte des forces de tension superficielle sur le ménisque ; l'amortissement comporte un terme supplémentaire dépendant de la nature du fluide. A. et J. Huetz ont de plus effectué une étude sur l'influence des coudes.

I.2.1.6. Travaux de Ch. Vivès[29] (1963)

L'auteur a étudié les phénomènes oscillatoires en magnétodynamique des liquides. Dans le cas particulier du mouvement oscillatoire libre dans un tube en U d'un liquide électroconducteur il a montré que l'action d'un champ magnétique uniforme sur l'écoulement a pour effet d'augmenter systématiquement les valeurs de l'amortissement et de la pseudo-période du mouvement.

I.2.2. Recherches sur le mouvement oscillatoire entretenu

Nous allons considérer d'abord les études purement théoriques en rappelant celles de S.F. Grace[30] et de Th. Sexl[31] déjà analysées en détail dans la référence (13).

I.2.2.1. Travaux de P. Lambossy[32] (1952)

L'auteur a établi les expressions de la vitesse, supposée axiale, et de la force de frottement par unité d'aire lorsque la pression appliquée à l'écoulement est une fonction harmonique du temps.

Il a montré que la forme du profil des vitesses dépend seulement du paramètre $R\sqrt{\frac{\Omega}{\nu}}$ avec Ω la fréquence des oscillations.

I.2.2.2. Travaux de J.R. Womersley[33] et [34] (1955)

L'auteur a étudié le mouvement oscillatoire d'un liquide visqueux sous l'action d'un gradient de pression périodique dans le temps lorsque les parois du tube sont rigides[33] ou élastiques[34]. Il a établi dans chacun des cas une relation reliant le débit masse, le gradient de pression, la fréquence d'oscillation, le rayon du tube et les propriétés physiques du fluide. Lorsque les parois sont élastiques l'auteur a tenu compte de la composante radiale de la vitesse mais a négligé dans une première étape les termes d'inertie devant les termes de viscosité. Il a effectué ensuite une correction pour tenir compte de ces termes.

I.2.2.3. Travaux de S. Uchida[35] (1956)

En supposant l'écoulement parallèle Uchida a donné une solution exacte du mouvement correspondant à un écoulement pulsé laminaire superposé à un écoulement permanent dans un tube. Il a étudié les profils des vitesses instantanées ainsi que l'évolution au cours du temps de la vitesse moyenne dans une section pour différentes valeurs du paramètre $R\sqrt{\frac{\Omega}{\nu}}$. Il a montré que le déphasage de la vitesse sur le gradient de pression, nul pour un mouvement permanent, peut atteindre 90° avec des oscillations de fréquence infinie. En considérant l'équation de conservation de l'énergie il a étudié le taux d'accroissement de l'énergie cinétique et le taux d'accroissement de la dissipation d'énergie due aux frottements internes. Il a remarqué en particulier que tandis que l'intégrale sur une période de la variation d'énergie cinétique est nulle celle de la dissipation d'énergie par les forces de frottement internes ne l'est pas.

I.2.2.4. Travaux de E. Urata [36] (1971)

E. Urata a étudié le mouvement instationnaire d'un liquide dans un tube très long en tenant compte de la vitesse radiale

et du gradient transversal de pression. Le résultat fondamental est que le gradient de pression transversal est toujours négligeable.

Nous analysons maintenant les études expérimentales ou à dominante expérimentale. Elles concernent principalement la mesure des vitesses et la détermination des conditions de transition.

I.2.2.4. Travaux de E.G. Richardson et E. Tyler[37] (1929)

E.G. Richardson et E. Tyler ont effectué, à l'aide d'un anémomètre à fil chaud, l'étude de la distribution des vitesses au cours du temps du mouvement oscillatoire forcé, dans des conduites de section circulaire ou carrée emplies d'air.

Les auteurs ont mis en évidence l'effet Richardson.

I.2.2.5. Travaux de J. Harris, G. Peev et W.L. Wilkinson[38] (1969)

Ces auteurs ont réalisé la mesure des vitesses dans le mouvement oscillatoire dans un tube sous l'action d'un gradient de pression périodique en filmant les trajectoires de particules colorées. Cette étude complète celle de Richardson en donnant la distribution des vitesses suivant un rayon.

I.2.2.6. Travaux de R.G. Linford et N.W. Ryan [39] (1965)

Ces auteurs se sont proposé de vérifier expérimentalement la loi établie par J.R. Womersley, pour les écoulements oscillatoires laminaires, reliant le débit masse, le gradient de pression, la fréquence d'oscillation, le rayon du tube, le coefficient de viscosité cinématique et la masse volumique du fluide. La mesure de ces différentes quantités leur a permis de confirmer parfaitement cette loi.

I.2.2.7. Travaux de E.B. Denison et W.H. Stevenson[40] (1970)

Une méthode de mesure des vitesses des écoulements non permanents a été mise au point par E.B. Denison et W.H. Stevenson. La mesure des vitesses a été réalisée à l'aide d'un laser directionnel et en utilisant l'effet Doppler. L'application de cette méthode au mouvement oscillatoire entretenu dans un tube a permis aux auteurs de tracer

les profils des vitesses expérimentaux et de les comparer aux profils des vitesses théoriques.

I.2.2.8. Travaux de J.H. Gerrard[41] (1971) et J.H. Gerrard et M.P. Hughes[42] (1971)

J.H.Gerrard a étudié le mouvement obtenu par superposition d'un écoulement pulsant et d'un écoulement moyen permanent. L'auteur a utilisé les propriétés de la solution de Baker pour déterminer, en filmant le mouvement, la distribution des vitesses. Il a trouvé en particulier que lorsque l'écoulement est turbulent le profil des vitesses est bien représenté au voisinage de la paroi par la relation $\frac{u}{U_\infty} = (\frac{y}{R})^{\frac{1}{n}}$. La mesure de l'intensité de turbulence et les visualisations effectuées lui ont permis de déterminer, dans l'étude de la transition, les valeurs critiques des différents paramètres.

En collaboration avec M.D. Hughes[42] il a comparé les mesures de la vitesse sur l'axe d'un tube, effectuées à différentes distances d'un piston animé d'un mouvement oscillatoire, avec les vitesses obtenues par la théorie de la "région d'entrée" lorsque l'écoulement est permanent.

I.2.2.9. Travaux de D. Hershey et Chi Soon Im [43] (1968)

Les mesures des pertes de charge et du débit masse ont permis aux auteurs de calculer un coefficient de frottement moyen. En représentant la variation du coefficient de frottement, en fonction du nombre de Reynolds ils ont déterminé le nombre de Reynolds critique. Par analyse des résultats obtenus ils ont remarqué que le nombre de Reynolds critique croit avec $R\sqrt{\frac{\Omega}{\nu}}$.

I.2.2.10 Travaux de D.A. Gilbrech et G.D. Combs [44] (1963)

D.A. Gilbrech et G.D. Combs ont effectué une étude expérimentale des conditions de transition de l'écoulement laminaire à l'écoulement turbulent en perturbant artificiellement l'écoulement

et en déterminant grâce à l'analyse de la réponse de cellules photoélectriques le nombre de Reynolds critique dont ils ont justifié la valeur par des considérations théoriques.

I.2.2.11 Travaux de E.L. Yellin[45] (1966)

E.L. Yellin a considéré le mouvement résultant de la superposition d'un écoulement permanent et d'un écoulement pulsé dans un tube et étudié le phénomène de transition de l'écoulement laminaire à l'écoulement turbulent en filmant le comportement d'une solution de Bentonite.

L'auteur a introduit le concept de temps de relaxation. L'analyse de ses résultats lui a permis de conclure que le critère du point d'inflexion et la valeur du nombre de Reynolds sont insuffisants pour déterminer les conditions de transition. Il est nécessaire de considérer aussi la forme et l'origine des perturbations et le temps de relaxation.

I.2.2.12 Travaux de T. Sarpkaya[46] (1965)

L'auteur a considéré le mouvement oscillatoire dans un tube sous l'action d'un gradient de pression harmonique ou non harmonique. Il a réalisé l'étude expérimentale de la stabilité en perturbant l'écoulement et en analysant la réponse de capteurs. Par comparaison avec la théorie il en a déduit que la présence de un ou plusieurs points d'inflexion est une condition d'instabilité nécessaire mais non suffisante. Il a vérifié que dans tous les cas le nombre de Reynolds critique est plus grand que celui de l'écoulement permanent correspondant.

Nous citerons enfin les travaux de J.A. Miller et A.A. Fejer[47] et de H.J. Obremski et A.A. Fejer[48] concernant les phénomènes de transition dans les couches limites oscillantes. Bien que dans ces études l'écoulement soit plan il existe certaines analogies notamment en ce qui concerne le comportement de l'écoulement aux faibles valeurs du nombre de Reynolds pour la plaque oscillante et aux faibles valeurs du paramètre ν pour le mouvement oscillatoire libre.

I.3. PRESENTATION DU TRAVAIL

Il nous a paru intéressant de reprendre les études effectuées à l'Institut de Mécanique des Fluides de Marseille, précédemment analysées en utilisant les moyens actuels de calcul et d'investigation expérimentale.

Dans le chapitre suivant nous avons établi, pour le régime apériodique et pour les régimes oscillatoires, une expression complète de la vitesse adimensionnelle $\frac{W}{\omega_p h_o}(r,t)$ supposée axiale et par suite fonction seulement du paramètre ϑ satisfaisant à toutes les conditions initiales et aux limites et en particulier à la condition $\frac{W}{\omega_p h_o}(r,o) = O$. Nous en avons déduit une expression permettant le calcul de l'amortissement.

Le troisième chapitre est consacré à l'exploitation numérique, à l'aide d'un calculateur électronique, des précédents résultats. Nous avons pu ainsi pour chaque valeur du paramètre ϑ tracer les différents profils des vitesses $\frac{W(r,t)}{\omega_p h_o}$, mettre en évidence différents régimes d'écoulement, déterminer les lois de variation de l'épaisseur de la couche limite, donner une représentation du coefficient de frottement et du vecteur tourbillon et enfin calculer l'amortissement.

Le quatrième chapitre concerne l'étude expérimentale de la distribution des vitesses à l'aide d'un anémomètre à film chaud. Cette étude nous a permis de tracer les profils des vitesses expérimentaux, de représenter la variation en fonction du temps de l'épaisseur de la couche limite expérimentale et de confirmer l'existence de différents types d'écoulements laminaires. Nous avons de plus constaté que pour certaines valeurs des paramètres ϑ et $\frac{h_o}{R}$ l'écoulement peut devenir turbulent.

L'étude de la stabilité de l'écoulement fait l'objet du chapitre V. Dans la partie théorique de ce chapitre nous avons établi un critère de stabilité puis étudié la stabilité de l'écoulement comme un problème aux valeurs initiales. La partie expérimentale concerne la visualisation de l'écoulement par deux méthodes.

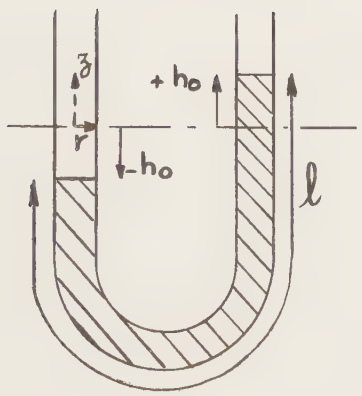
Ces visualisations ont permis, de mettre en évidence des instabilités et de déterminer les conditions de transition.

L'étude que nous avons effectuée nous a permis d'expliquer en annexe certains résultats expérimentaux concernant l'écoulement du sang dans l'aorte et dans les artères durant la phase systolique.

C H A P I T R E II

SOLUTIONS DES EQUATIONS DU MOUVEMENT

II - 1 EQUATIONS DU MOUVEMENT



Considérons le mouvement dans un tube en U, dont les branches rectilignes et verticales ont une section droite circulaire de rayon R, d'une colonne liquide de longueur ℓ écartée de sa position d'équilibre d'une hauteur h_o puis brusquement libérée à l'instant $t = 0$. Dans un but de simplification nous faisons abstraction des phénomènes secondaires dans les coudes et nous considérons le mouvement dans l'une des branches, la branche de gauche par exemple, que nous supposons de longueur infinie.

Nous fixons la position d'un point de la colonne fluide par ses coordonnées cylindriques r, θ , z, l'axe des z étant confondu avec l'axe du tube et dirigé positivement vers le haut, l'origine des axes étant prise dans le plan d'équilibre de la colonne fluide. Le mouvement présentant une symétrie axiale, les composantes de la vitesse et la pression sont indépendantes de θ , la composante azimutale de la vitesse est nulle.

Les équations de Navier Stokes et l'équation de conservation de la masse s'écrivent en utilisant des variables

adimensionnelles :

$$\frac{\partial U'}{\partial t'} + \frac{h_o}{R}\left(U' \frac{\partial U'}{\partial r'} + W' \frac{\partial U'}{\partial z'}\right) = \frac{h_o}{R} \frac{\partial p'^*}{\partial r'} + \frac{1}{\vartheta}\left(\frac{\partial^2 U'}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial U'}{\partial r'} - \frac{U'}{r'^2} + \frac{\partial^2 U'}{\partial z'^2}\right)$$

$$\frac{\partial W'}{\partial t'} + \frac{h_o}{R}\left(U' \frac{\partial W'}{\partial r'} + W' \frac{\partial W'}{\partial z'}\right) = - \frac{h_o}{R} \frac{\partial p'^*}{\partial z'} + \frac{1}{\vartheta}\left(\frac{\partial^2 W'}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial W'}{\partial r'} + \frac{\partial^2 W'}{\partial z'^2}\right) \qquad \text{(II.1)}$$

$$\frac{\partial U'}{\partial r'} + \frac{U'}{r'} + \frac{\partial W'}{\partial z'} = 0$$

où

$$U' = \frac{U}{\omega_p h_o}, \quad W' = \frac{W}{\omega_p h_o}, \quad p'^* = \frac{p + \rho g z}{\rho (\omega_p h_o)^2}$$

$$r' = \frac{r}{R}, \quad z' = \frac{z}{R}, \quad t' = \omega_p t, \quad \vartheta = \frac{R^2 \omega_p}{\nu}$$

avec

U	la composante radiale de la vitesse
W	la composante axiale de la vitesse
p	la pression
ν	le coefficient de viscosité cinématique du fluide
ρ	la masse spécifique supposée constante
$\omega_p = \sqrt{\frac{2g}{\ell}}$	la pulsation avec laquelle oscillerait la colonne si le fluide était non visqueux
g	l'accélération de la pesanteur

Aux équations (II.1) doivent être adjointes les conditions initiales et les conditions aux limites.

Conditions initiales et conditions aux limites associées aux équations II.1.

$\forall\, t' \leqslant 0,\ \forall\, r',$

$\forall\, z' \leqslant -\frac{h_o}{R}$ ou $\forall\, z' \leqslant \frac{h_o}{R}$

a) $U' = W' = 0$

b) la dénivellation de la surface libre repérée par rapport à la position d'équilibre de la colonne fluide est l'amplitude initiale $\pm\, h_o$

$\forall\, t',\ \forall\, z' \leqslant -\frac{h_o}{R}$ ou $\forall\, z' \leqslant \frac{h_o}{R}$

c) Sur la paroi ($r' = \pm\, 1$)

$U' = W' = 0$

Sur l'axe ($r' = 0$)

$U' = 0$

$\forall\, t', \forall\, r'$

d) Sur la surface libre

On doit écrire une condition dynamique exprimant l'égalité des contraintes de part et d'autre de la surface libre. Cette condition est traduite par deux équations :

- Suivant la normale à la surface les forces de pression et de capillarité s'équilibrent
- Dans le plan tangent à la surface les forces de viscosité s'annulent

Les équations (II.1) et les conditions initiales et aux limites associées mettent en évidence les deux paramètres de l'écoulement $\mathcal{V}$ et $\frac{h_o}{R}$.

Cependant le problème ainsi posé est difficile à résoudre car d'une part les équations (II.1) ne sont pas linéaires, d'autre part la forme de la surface libre étant inconnue, les conditions d) ne peuvent être écrites.

Nous sommes ainsi conduits à faire des hypothèses simplificatrices, justifiées par les résultats expérimentaus que nous avons obtenus. Nous avons en effet remarqué que la surface libre restait approximativement plane au cours du temps et que les profils de vitesse axiale ne variaient pratiquement pas le long de la colonne fluide, en exceptant les extrémités de la colonne.

L'hypothèse $\frac{\partial W'}{\partial z'}$ petit conduit en considérant l'équation de continuité et la condition aux limites U' = 0 pour r' = $\begin{matrix}+1\\0\\-1\end{matrix}$ à :

U' est petit devant W'.

Les équations (II.1) s'écrivent alors

$$\frac{\partial p'^{*}}{\partial r'} = 0$$

$$\frac{\partial W'}{\partial t'} - \frac{1}{\mathcal{V}}\left(\frac{\partial^2 W'}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'}\,\frac{\partial W'}{\partial r'}\right) = -\frac{h_o}{R}\,\frac{\partial p'^{*}}{\partial z'} \qquad \text{(II.2')}$$

$$\frac{\partial W'}{\partial z'} = 0$$

Conditions initiales et conditions aux limites associées aux équations II.2

Remarquons tout d'abord que la condition d) sur la surface libre n'est pas compatible avec les équations (II.2)

car pour annuler les forces de viscosité il faudrait annuler $\frac{\partial W'}{\partial r'}$ et l'égalité des forces de pression (forces de capillarité nulles) de part et d'autre de la surface libre supposerait $\frac{\partial p'}{\partial r'} \neq 0$.

Afin d'obtenir une solution approchée du problème, nous allons supposer que :

- Au sein du fluide la répartition de vitesse et de pression est donnée par les équations (II.2)
- La surface libre est remplacée par la surface plane dont l'ordonnée est donnée par :

$$h_t = \frac{2}{R^2} \int_0^R Z\, r\, dr$$

avec Z, ordonnée d'un point de la surface libre à la distance r de l'axe,

$$Z = \int_{t_o}^{t} W\, dt$$

to défini par h(to) = 0

Si $\zeta = \int W\, dt$ alors $Z = \zeta(t) - \zeta(to)$ et par suite

$$h_t = \frac{2}{R^2} \int_0^R \zeta(t)\, r\, dr \qquad (II.3)$$

Les conditions aux limites et les conditions initiales associées aux équations (II.2) sont donc les suivantes

$\forall\, t' \leqslant 0\ ,\ \forall\, r'$

a') $W' = 0$

b') $h_t = \varepsilon\, h_o \qquad (\varepsilon = \pm 1)$

Sur la paroi $\forall\, t'$ c') $W' = 0$

$(r' = \pm 1)$

II.2. RESOLUTION DES EQUATIONS DU MOUVEMENT

Les équations (II.2) et les conditions a'), b'), c') montrent que :

$\alpha)$ $p'^{*} = p'^{*}(z', t', \frac{R}{h_o}, \vartheta)$

$\beta)$ $\frac{h_o}{R}\frac{\partial p'^{*}}{\partial z'} = \frac{h_o}{R}\frac{\partial p'^{*}}{\partial z'}(t', \vartheta)$

$\gamma)$ $W' = W'(r', t', \vartheta)$

a) et b) montrent que p'^{*} est fonction linéaire de z'

Posons $$-\frac{h_o}{R}\frac{\partial p'^{*}}{\partial z'} = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n\, e^{i\frac{\omega_n}{\omega_p}t'} \qquad (II.4)$$

χ_n et $\frac{\omega_n}{\omega_p}$ étant des fonctions du seul paramètre ϑ

D'après (II.2) nous avons

$$\frac{\partial W'}{\partial t'} - \frac{1}{\vartheta}\left(\frac{\partial^2 W'}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'}\frac{\partial W'}{\partial r'}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n\, e^{i\frac{\omega_n}{\omega_p}t'}$$

La forme de cette équation conduit à chercher des solutions particulières $W'_n(r',t')$ sous la forme :

$$W'_n(r',t') = f_n(r')\, e^{i\frac{\omega_n}{\omega_p}t'}$$

avec

$$W'(r',t') = \sum_{n=1}^{\infty} W'_n(r',t')$$

d'où

$$f''_n(r') + \frac{1}{r'} f'_n(r') - i \frac{\omega_n}{\omega_p} \vartheta f_n(r') + \chi_n \vartheta = 0$$

Par intégration on obtient

$$f_n(r) = D_n J_o \left(\sqrt{- i \frac{\omega_n}{\omega_p} \vartheta} \frac{r}{R}\right) + F_n N_o \left(\sqrt{- i \frac{\omega_n}{\omega_p} \vartheta} \frac{r}{R}\right) + \frac{\chi_n}{i \frac{\omega_n}{\omega_p}}$$

Avec D_n et F_n des constantes, J_o la fonction de Bessel d'ordre zéro et N_o la fonction de Weber

$f_n(r)$ devant être fini pour $\frac{r}{R} = 0$, $F_n = 0$ d'où

$$f_n(r) = D_n J_o \left(\sqrt{-i \frac{\omega_n}{\omega_p} \vartheta} \frac{r}{R}\right) + \frac{\chi_n}{i \frac{\omega_n}{\omega_p}}$$

Les fonctions $e^{i \frac{\omega_n}{\omega_p} t'}$ étant linéairement indépendantes nous écrirons que chacune des solutions $W'_n(r',t')$ satisfait la condition à la paroi $W'_n(r',t') = 0$ ce qui permet la détermination de D_n.

Nous avons alors

$$\frac{W}{\omega_p h_o} = \sum_{n=1}^{\infty} + i B_n \left[1 - \frac{J_o\sqrt{-i \frac{\omega_n}{\omega_p} \vartheta} \frac{r}{R}}{J_o\sqrt{-i \frac{\omega_n}{\omega_p} \vartheta}} \right] e^{i \frac{\omega_n}{\omega_p} t'} \qquad (II.5)$$

Avec $B_n = -i \frac{\chi_n}{\frac{\omega_n}{\omega_p}}$

Pour avoir une expression complète de la vitesse il reste à déterminer $\frac{\omega_n}{\omega_p}$ et B_n.

II.3. DETERMINATION DE $\frac{\omega_n}{\omega_p}$

II.3.1. Equation donnant $\frac{\omega_n}{\omega_p}$

p'^{*} étant fonction linéaire de z' nous pouvons écrire que le gradient de pression est donné par le quotient de la différence de pression entre les extrémités de la colonne fluide à la longueur de cette colonne.

Nous avons donc

$$\frac{\partial p^{*}}{\partial z} = \frac{2\,\rho\,g\,h_t}{\ell}$$

Soit

$$\frac{h_o}{R}\,\frac{\partial p'^{*}}{\partial z'} = \frac{h_t}{h_o}$$

L'équation (II.3) donne :

$$\frac{h_t}{h_o} = 2\int_o^1 \frac{\zeta(t)}{h_o}\,\frac{r}{R}\;d\left(\frac{r}{R}\right)$$

Par suite tenant compte de (II.5) on obtient

$$\frac{h_t}{h_o} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\chi_n}{\left(\frac{\omega_n}{\omega_p}\right)^2}\left(1 - \frac{2\,J_1\left(\sqrt{-i\,\frac{\omega_n}{\omega_p}\vartheta}\right)}{\sqrt{-i\,\frac{\omega_n}{\omega_p}\vartheta}\;J_o\left(\sqrt{-i\,\frac{\omega_n}{\omega_p}\vartheta}\right)}\right) e^{i\frac{\omega_n}{\omega_p}t'} \qquad (II.3')$$

En identifiant (II.3') et (II.4) on déduit que $\frac{\omega_n}{\omega_p}$ est solution de l'équation :

$$\left(\frac{\omega_n}{\omega_p}\right)^2 = 1 - \frac{2J_1\left(\sqrt{-i\,\frac{\omega_n}{\omega_p}\vartheta}\right)}{\sqrt{-i\,\frac{\omega_n}{\omega_p}\vartheta}\;J_o\left(\sqrt{-i\,\frac{\omega_n}{\omega_p}\vartheta}\right)} \qquad (II.6)$$

II.3.2. Discussion et calcul des racines de l'équation (II.6)

La forme de l'équation (II.6) indique que ses racines ne peuvent être que des imaginaires purs ou des nombres complexes. Considérons d'abord les racines imaginaires.

II.3.2.1. Racines imaginaires

Elles sont données par $\omega_n = i\,\lambda_n$ avec λ_n le facteur d'amortissement, réel positif. ω_p étant réel le deuxième membre de l'équation (II.6) est réel négatif.

Posons $$x = \sqrt{\frac{\lambda_n}{\omega_p}}\ \sqrt{\vartheta} \qquad (x \geqslant 0)$$

et

$$I(x) = \frac{2}{x}\,\frac{J_1(x)}{J_o(x)} - 1$$

L'équation (II.6) est alors équivalente au système

$$\begin{cases} \left(\frac{\lambda_n}{\omega_p}\right)^2 = I(x) \\ x = \sqrt{\frac{\lambda_n}{\omega_p}}\ \sqrt{\vartheta} \end{cases} \qquad I(x) \geqslant 0 \qquad \text{(II.6')}$$

Il s'agit de déterminer tous les couples $(\frac{\lambda_n}{\omega_p}, \vartheta)$ satisfaisant à (II.6').

Etudions d'abord la fonction I(x).

Lorsque x croît à partir de 0, I(x) passe de $+\infty$ à $-\infty$ chaque fois que x passe par les valeurs x_1^o , x_2^o,..... x_n^o,..... qui sont les zéros de la fonction $J_o(x)$. On peut montrer que I(x) est une fonction croissante de x dans tous les intervalles

$$[0, x_1^o[\qquad \text{et} \quad]x_p^o\ ,\ x_{p+1}^o[\qquad (p = 1,2....n.....)$$

D'autre part pour x petit

$$I(x) \simeq \frac{2}{x}\,\frac{\frac{x}{2}(1-\frac{x^2}{8})}{1-\frac{x^2}{4}} - 1 = \frac{\frac{x^2}{8}}{1-\frac{x^2}{4}}$$

Par suite quant $x \longrightarrow 0$ $\qquad I(x) \longrightarrow 0$

Les calculs que nous avons effectués nous ont permis de tracer la courbe représentative de la fonction I(x) (figure 1). Soit X_p la valeur de $x \in]x_p^o,\ x_{p+1}^o[$ telle que $I(X_p) = 0$

Les couples $(\frac{\lambda_n}{\omega_p}, \vartheta)$ existent si $I(x) \geqslant 0$ c'est à dire si

$$x \in]X_p,\ x_{p+1}^o[$$

ou

$$x \in [0,\ x_1^o[\qquad (p = 1,2...n....)$$

A une valeur donnée de $I(x)$ telle que $I(x) \geqslant 0$ correspondent une infinité de valeurs $x_1, x_2, \ldots x_p, \ldots, x_n, \ldots$ telles que $x_p \in]\, x_p, x_{p+1}^o [$

ou $x_p \in [\, 0, x_1^o [$

et par suite une infinité de couples $(\frac{\lambda_n}{\omega_p}, \vartheta)$ donnés par les équations (II.6').

Considérons les fonctions $\vartheta = \vartheta(\frac{\lambda_n}{\omega_p}, x)$. Le calcul de $\frac{d\vartheta}{d(\frac{\lambda_n}{\omega_p})}$ montre que cette dérivée s'annule pour $x = x^*$ $(0 < x^* < x_1^o)$. Elle est positive $\forall\ o \leqslant x < x^*$ et négative $\forall\ x > x^*$. Par suite pour $x > x_1^o$ c'est à dire pour $n \geqslant 2$ ϑ est fonction décroissante de $\frac{\lambda_n}{\omega_p}$.

Par contre pour $n = 1$ ϑ est fonction croissante puis décroissante de $\frac{\lambda_1}{\omega_p}$

Lorsque $x \longrightarrow x_1^o$ $\quad \frac{\lambda_1}{\omega_p} \longrightarrow \infty$ $\quad$ et $\vartheta \longrightarrow 0$

Lorsque $x \longrightarrow 0$ $\quad \frac{\lambda_1}{\omega_p} \longrightarrow 0$ $\quad$ et $\vartheta \longrightarrow 0$

Car pour x petit $\quad I(x) = (\frac{\lambda_1}{\omega_p})^2 \sim \frac{x^2}{8}$

et

$$\vartheta = \frac{x^2}{\frac{\lambda_1}{\omega_p}} \sim 8\ (\frac{\lambda_1}{\omega_p})$$

Nous avons dans la figure 2 représenté les courbes $\frac{\lambda_n}{\omega_p} = \varphi(\vartheta)$ obtenues par le calcul numérique. Pour $x = x^*$ nous avons $\vartheta = \vartheta^* = 3{,}436$.

A une valeur donnée de ϑ correspondent une infinité de racines imaginaires de l'équation (II.6) dont les modules sont obtenus en coupant les courbes $\frac{\lambda_n}{\omega_p}$ en fonction de ϑ par la parallèle à l'axe des $\frac{\lambda_n}{\omega_p}$ passant par la valeur considérée de ϑ.

Deux cas sont alors à distinguer :

1er cas : $0 < \vartheta \leqslant \vartheta^*$

Chaque courbe représentative de $\frac{\lambda_n}{\omega_p}$ est coupée une fois, à partir de n = 2, par la droite d'abscisse ϑ et aux points d'intersection correspondent les modules :

$$\frac{\lambda_2}{\omega_p}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \frac{\lambda_n}{\omega_p}, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

La courbe correspondant à n = 1 est coupée deux fois et aux deux points d'intersection correspondent deux modules $\frac{\lambda'_1}{\omega_p}$ et $\frac{\lambda''_1}{\omega_p}$.

Lorsque $\vartheta = \vartheta^*$ ces deux points d'intersection sont confondus.

2ème cas : $\vartheta > \vartheta^*$

Les solutions $\frac{\lambda'_1}{\omega_p}$ et $\frac{\lambda''_1}{\omega_p}$ sont éliminées et il reste l'infinité de racines imaginaires de modules : $\frac{\lambda_2}{\omega_p}$ ....., $\frac{\lambda_n}{\omega_p}$, ...

Remarque

A partir de n = 3 on peut trouver une expression approximative de $\frac{\lambda_n}{\omega_p}$ en fonction de ϑ en utilisant l'expression asymptotique de $J_o(x)$.

Les valeurs des χ_n, zéros de I(x), sont données par la relation :

$$\chi_n = \frac{15}{8} \quad t_g\ (\chi_n - \frac{\pi}{4}) \simeq n\pi \quad - \frac{\pi}{4} \quad - \frac{15}{2\pi\ (4n-1)}$$

Or

$$x_n^o \simeq n\pi \quad - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2\pi\ (4n-1)}$$

la largeur du nième intervalle partiel est donc $\frac{8}{\pi(4n-1)}$. Par suite en prenant pour x une valeur particulière, par exemple celle de la moitié de l'intervalle partiel $n\pi - \frac{\pi}{4}$, nous avons

$$\frac{\lambda_n}{\omega_p} = \frac{(n\pi - \frac{\pi}{4})^2}{\vartheta} \qquad (II\ 8)$$

Dans la figure (2) nous avons représenté pour n = 3 et n = 4 les valeurs calculées par cette expression et nous constatons que les résultats obtenus sont en excellent accord avec ceux déduits du calcul numérique des racines. Nous avons donc dans la suite du programme calculé $\frac{\lambda_n}{\omega_p}$ pour $n \geqslant 4$ par l'expression (II.8).

Etudions maintenant les racines complexes.

II.3.2.2. Racines complexes

A ces racines correspondent les composantes élémentaires périodiques du mouvement.

Posons

$$\frac{\omega_n}{\omega_p} = \frac{\Omega_n}{\omega_p} + i\,\frac{\lambda_n}{\omega_p} \quad \text{et} \quad x = \sqrt{-\,i\,\frac{\omega_n}{\omega_p}\,\vartheta} = \rho\, e^{i\theta}$$

La discussion sera conduite en prenant pour variable auxiliaire x comme dans le cas des racines imaginaires. Supposons donné ρ , le module de x, et déterminons les conditions que doit remplir Θ pour que l'équation (II.6) admette une racine complexe.

Après transformation (II.6) prend la forme

$$\frac{\rho^4}{\vartheta^2}\; e^{i(4\Theta+\pi)} = 1 - \frac{2\,J_1(\rho\, e^{i\Theta})}{\rho e^{i\Theta}\, J_0(\rho\, e^{i\Theta})} \qquad (II.9)$$

C'est une équation en Θ lorsque ρ est donné.

D'après les propriétés des fonctions de Bessel, si

θ est une racine de cette équation $\pi + \theta$, $\pi - \theta$ et $-\theta$ sont également racines.

A ces quatre racines correspondent deux racines pour l'équation (II.6) :

$$+ \frac{\Omega}{\omega_p} + i \frac{\lambda_1}{\omega_p}$$

$T = \frac{2\pi}{\Omega}$ désigne la pseudo-période du mouvement.

Le calcul des racines que nous avons effectué pour différentes valeurs de ϑ montre que ces racines n'existent que pour $\vartheta > \vartheta^*$ et que ces racines sont uniques. Les courbes représentatives de $\frac{\Omega}{\omega_p}$ et de $\frac{\lambda_1}{\omega_p}$ en fonction de ϑ sont tracées dans la figure 3. On remarque que $\frac{\Omega}{\omega_p}(\vartheta^*) = 0$.

II.2.3.2.3. Résumé et tableau récapitulatif

La discussion et le calcul des racines de l'équation (II.6) permettent d'énoncer les résultats suivants :

Pour $\vartheta \leqslant \vartheta^*$ toutes les racines de l'équation (II.6) sont imaginaires et par suite l'expression (II.5) donnant la vitesse est composée d'une infinité de termes apériodiques. L'écoulement est apériodique.

Pour $\vartheta > \vartheta^*$ l'équation (II.6) admet deux racines complexes conjuguées et une infinité de racines imaginaires. L'expression (II.5) de la vitesse est donc composée de termes oscillatoires et de termes apériodiques. L'écoulement est oscillatoire.

Ces résultats sont résumés dans le tableau suivant:

Posons

$$J_o\sqrt{-\,i\,\frac{\omega_n}{\omega_p}\,\nu}\,\frac{r}{R} = \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}\,J_o\left(\frac{x_m^o\,r}{R}\right)$$

On trouve aisément en multipliant les deux membres par $J_o\left(x_m^o\,\frac{r}{R}\right)$ et en intégrant

$$A_{nm} = -\,\frac{2x_m^o\,J_o\left(\sqrt{-\,i\,\frac{\omega_n}{\omega_p}\,\nu}\right)}{\left[-\,i\,\frac{\omega_n}{\omega_p}\,\nu - (x_m^o)^2\right]\,J_1(x_m^o)}$$

Par suite

$$\frac{J_o\left(\sqrt{-\,i\,\frac{\omega_n}{\omega_p}\,\nu}\,\frac{r}{R}\right)}{J_o\left(\sqrt{-\,i\,\frac{\omega_n}{\omega_p}\,\nu}\right)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-\,2x_m^o\,J_o\left(x_m^o\,\frac{r}{R}\right)}{\left[-\,i\,\frac{\omega_n}{\omega_p}\,\nu - (x_m^o)^2\right]\,J_1(x_m^o)}$$

D'après les propriétés des fonctions de Bessel on sait que :

$$1 = \sum_{m=1}^{\infty} 2\,\frac{J_o\left(x_m^o\,\frac{r}{R}\right)}{x_m^o\,J_1\,(x_m)}$$

Par suite

$$1 - \frac{J_o\left(\sqrt{-\,i\,\frac{\omega_n}{\omega_p}\,\nu}\,\frac{r}{R}\right)}{J_o\left(\sqrt{-\,i\,\frac{\omega_n}{\omega_p}\,\nu}\right)} = 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_o\left(x_m^o\,\frac{r}{R}\right)}{x_m^o\,J_1\,(x_m^o)}\left(1 - \frac{(x_m^o)^2}{(x_m^o)^2 + i\,\frac{\omega_n}{\omega_p}\,\nu}\right)$$

D'où

$$\frac{W}{\omega_p h_o} = \sum_{n=1}^{\infty} 2 B_n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{i \frac{\omega_n}{\omega_p} \nu}{(x_m^o)^2 + i \frac{\omega_n}{\omega_p} \nu} \frac{J_o (x_m^o \frac{r}{R})}{x_m^o J_1(x_m^o)} e^{i \frac{\omega_n}{\omega_p} (\omega_p t)}$$

Le rôle particulier joué par $\frac{\omega_1}{\omega_p}$ conduit à considérer séparément le cas n = 1.

$$\text{Nous posons donc : } \frac{W}{\omega_p h_o} = \frac{W_1}{\omega_p h_o} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{W_n}{\omega_p h_o}$$

II.4.1. Régime oscillatoire

II.4.1.1. n = 1

Les racines de l'équation (II.6) sont données par

$$\frac{\omega_1}{\omega_p} = \pm \frac{\Omega}{\omega_p} + i \frac{\lambda_1}{\omega_p}$$

Considérons d'abord la racine

$$\frac{\omega_1}{\omega_p} = \frac{\Omega}{\omega_p} + i \frac{\lambda_1}{\omega_p}$$

$$\frac{W_1}{\omega_p h_o} = 2 (B_{1r} + i B_{1i}) e^{-\frac{\lambda_1}{\omega_p} (\omega_p t)} (\cos \Omega t + i \sin \Omega t)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_o (x_m^o \frac{r}{R})}{x_m^o J_1(x_m^o)} \frac{\frac{\lambda_1}{\omega_p} \nu - i \frac{\Omega}{\omega_p} \nu}{\frac{\lambda_1}{\omega_p} \nu - (x_m^o)^2 - i \frac{\Omega}{\omega_p} \nu}$$

avec B_{1r} et B_{1i} respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de B_1.

La partie réelle de $\frac{W_1}{\omega_p h_o}$ est donnée par

$$\frac{W_1}{\omega_p h_o} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\lambda_1}{\omega_p}(\omega_p t)} J_o(x_m^o \frac{r}{R})}{x_m^o J_1(x_m^o)} \left[B_{1r} a_o - B_{1i} a_1 \right]$$

avec

$$a_o = \frac{\left[(\frac{\lambda_1}{\omega_p})^2 + (\frac{\Omega}{\omega_p})^2 - \frac{\lambda_1}{\omega_p} (x_m^o)^2 \nu^{-1} \right] \cos \Omega t - \frac{\Omega}{\omega_p} \nu^{-1} (x_m^o)^2 \sin \Omega t}{\left[\frac{\lambda_1}{\omega_p} - (x_m^o)^2 \nu^{-1} \right]^2 + (\frac{\Omega}{\omega_p})^2}$$

(II.10)

$$a_1 = \frac{\left[(\frac{\lambda_1}{\omega_p})^2 + (\frac{\Omega}{\omega_p})^2 - \frac{\lambda_1}{\omega_p} (x_m^o)^2 \nu^{-1} \right] \sin \Omega t - \frac{\Omega}{\omega_p} \nu^{-1} (x_m^o)^2 \cos \Omega t}{\left[\frac{\lambda_1}{\omega_p} - (x_m^o)^2 \nu^{-1} \right]^2 + (\frac{\Omega}{\omega_p})^2}$$

Considérons maintenant la racine

$$\frac{\omega_1}{\omega_p} = - \frac{\Omega}{\omega_p} + i \frac{\lambda_1}{\omega_p}$$

Puisque ω_1 n'intervient dans l'expression complexe de $\frac{W_1}{\omega_p h_o}$, que sous la forme $i\omega_1$, la partie réelle de cette expression ne change pas quand $\frac{\Omega}{\omega_p}$ devient $- \frac{\Omega}{\omega_p}$

On a donc

$$\frac{W_1}{\omega_p h_o} = 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\lambda_1}{\omega_p}(\omega_p t)} \; J_o(x_m^o \; \frac{r}{R})}{x_m^o \; J_1(x_m^o)} \left[B_{1r} \; a_o - B_{1i} \; a_1 \right]$$

En posant : $D_1 = 4 \; B_{1r}$

$$\Lambda D_1 = 4 \; B_{1i}$$

On obtient

$$\frac{W_1}{\omega_p h_o} = D_1 \sum_{m=1}^{\infty} (a_o + \Lambda a_1) \; e^{-\frac{\lambda_1}{\omega_p}(\omega_p t)} \; \frac{J_o \; (x_m^o \; \frac{r}{R})}{x_m^o \; J_1 \; (x_m^o)}$$

II-4-1-2 $n \geqslant 2$

Nous avons

$$\frac{\omega_n}{\omega_p} = i \; \frac{\lambda_n}{\omega_p}$$

et par suite

$$\frac{W_n}{\omega_p h_o} = D_n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-\frac{\lambda_n}{\omega_p} \; \nu \; e^{-\frac{\lambda_n}{\omega_p}(\omega_p t)}}{(x_m^o)^2 \; - \; \frac{\lambda_n}{\omega_p} \; \nu} \; \frac{J_o \; (x_m^o \; \frac{r}{R})}{x_m^o \; J_1 \; (x_m^o)}$$

D'où, en résumé

$$\frac{W(r,t)}{\omega_p h_o} = D_1 \sum_{m=1}^{\infty} (a_o + \Lambda a_1)\, e^{-\frac{\lambda_1}{\omega_p}(\omega_p t)} \frac{J_o\left(x_m^o \frac{r}{R}\right)}{x_m^o\, J_1(x^o{}_m)} + \qquad (II\text{-}11)$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} D_n\, e^{-\frac{\lambda_n}{\omega_p}(\omega_p t)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\frac{\lambda_n}{\omega_p}\,\nu}{\frac{\lambda_n}{\omega_p}\,\nu - (x_m^o)^2} \frac{J_o(x_m^o \frac{r}{R})}{x_m^o\, J_1(x_m^o)}$$

Il reste à déterminer D_1, Λ , et D_n pour n variant de 2 à l'infini

II-4-1-3- Ecriture des conditions aux limites

II-4-1-3-1 W' = 0 pour t' = 0

Cette relation doit être vérifiée quel que soit r

En posant :

$$\alpha_m = \frac{(\frac{\lambda_1}{\omega_p})^2 + (\frac{\Omega}{\omega_p})^2 - \frac{\lambda_1}{\omega_p}(x_m^o)^2 \nu^{-1}}{\left[\frac{\lambda_1}{\omega_p} - (x_m^o)^2 \nu^{-1}\right]^2 + (\frac{\Omega}{\omega_p})^2}$$

$$\beta_m = \frac{\frac{\Omega}{\omega_p} \nu^{-1} (x_m^o)^2}{\left[\frac{\lambda_1}{\omega_p} - (x_m^o)^2 \nu^{-1}\right]^2 + (\frac{\Omega}{\omega_p})^2} \qquad (II.12)$$

On doit avoir quel que soit m :

$$\alpha_m D_1 + \Lambda \quad \beta_m D_1 + \sum_{n=2}^{\infty} D_n \frac{\frac{\lambda_n}{\omega_p}\,\nu}{\frac{\lambda_n}{\omega_p}\,\nu - (x_m^o)^2} = 0$$

Posons

$$\Theta_{mn} = \frac{\frac{\lambda_n}{\omega_p}\,\nu}{\frac{\lambda_n}{\omega_p}\,\nu - (x_m^o)^2}$$

Il s'ensuit

$$\alpha_1 D_1 + \Theta_{12} D_2 + \Theta_{13} D_3 + \dots\dots\dots\dots + \Theta_{1n} D_n + \dots = -\Lambda \beta_1 D_1$$

$$\alpha_2 D_1 + \Theta_{22} D_2 + \Theta_{23} D_3 + \dots\dots\dots\dots + \Theta_{2n} D_n + \dots = -\Lambda \beta_2 D_1$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\alpha_m D_1 + \Theta_{m2} D_2 + \Theta_{m3} D_3 + \dots\dots\dots\dots + \Theta_{mn} D_n + \dots = -\Lambda \beta_m D_1$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

Soit

$$\frac{1}{\Lambda}\alpha_1 + \frac{1}{\Lambda}\frac{D_2}{D_1}\Theta_{12} + \frac{1}{\Lambda}\frac{D_3}{D_1}\Theta_{13} + \dots\dots + \Theta_{1n}\frac{D_n}{\Lambda D_1} + \dots = -\beta_1$$

$$\frac{1}{\Lambda}\alpha_2 + \frac{1}{\Lambda}\frac{D_2}{D_1}\Theta_{22} + \frac{1}{\Lambda}\frac{D_3}{D_1}\Theta_{23} + \dots\dots + \Theta_{2n}\frac{D_n}{\Lambda D_1} + \dots = -\beta_2$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{1}{\Lambda}\alpha_m + \frac{1}{\Lambda}\frac{D_2}{D_1}\Theta_{m2} + \frac{1}{\Lambda}\frac{D_3}{D_1}\Theta_{m3} + \dots\dots + \Theta_{mn}\frac{D_n}{\Lambda D_1} + \dots = -\beta_m$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

Lorsque les conditions de convergence des développements en série sont assurées, on peut, en considérant un nombre de termes suffisant, calculer tous les $D'_j = \frac{D_j}{\Lambda D_1}$ et en particulier $D'_1 = \frac{1}{\Lambda}$ en fonction de α_m, β_m et Θ_{mn}.

II-4-1-3-2 $\frac{h_t}{h_o} = \varepsilon$ pour $t' = 0$ $\quad (\varepsilon = \pm 1)$

Par intégration de l'équation (II.11) nous obtenons :

$$\frac{h_t}{h_o} = 2D_1 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\lambda_1}{\omega_p}(\omega_p t)}}{(x_m^o)^2 \left[(\frac{\lambda_1}{\omega_p})^2 + (\frac{\Omega}{\omega_p})^2\right]} (\alpha_m + \Lambda\beta_m)(\frac{\Omega}{\omega_p} \sin \Omega t - \frac{\lambda_1}{\omega_p} \cos \Omega t)$$

$$+ 2D_1 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\lambda_1}{\omega_p}(\omega_p t)}}{(x_m^o)^2 \left[(\frac{\lambda_1}{\omega_p})^2 + (\frac{\Omega}{\omega_p})^2\right]} (\beta_m - \Lambda\alpha_m)(\frac{\lambda_1}{\omega_p} \sin \Omega t + \frac{\Omega}{\omega_p} \cos \Omega t)$$

$$- 2 \sum_{n=2}^{\infty} D_n e^{-\frac{\lambda_n}{\omega_p}(\omega_p t)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\vartheta}{(x_m^o)^2 \left[\frac{\lambda_n}{\omega_p}\vartheta - (x_m^o)^2\right]}$$

D'où

$$\varepsilon = 2D_1 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-\frac{\lambda_1}{\omega_p}(\alpha_m + \Lambda\beta_m) + (\beta_m - \Lambda\alpha_m)(\frac{\Omega}{\omega_p})}{\left[(\frac{\lambda_1}{\omega_p})^2 + (\frac{\Omega}{\omega_p})^2\right](x_m^o)^2}$$

$$- 2 \sum_{n=2}^{\infty} \Lambda D_1 D_n' \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\vartheta}{(x_m^o)^2 \left[\frac{\lambda_n}{\omega_p}\vartheta - (x_m^o)^2\right]}$$

Cette relation permet le calcul de D_1, tous les autres coefficients étant connus.

Posons : $K = 2D_1$

Nous avons alors :

$$\frac{h_t}{h_o} = \varepsilon K \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\left(\frac{\lambda_1}{\omega_p}\right)\left(\frac{\omega_p}{\Omega}\right)(\Omega t)} (\alpha_m + \Lambda\beta_m)\left(\frac{\Omega}{\omega_p}\sin \Omega t - \frac{\lambda_1}{\omega_p}\cos \Omega t\right)}{(x_m^o)^2 \left[\left(\frac{\lambda_1}{\omega_p}\right)^2 + \left(\frac{\Omega}{\omega_p}\right)^2\right]} \right.$$

(II.13)

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\lambda_1}{\omega_p}\frac{\omega_p}{\Omega}(\Omega t)} (\beta_m - \Lambda\alpha_m)\left(\frac{\lambda_1}{\omega_p}\sin \Omega t + \frac{\Omega}{\omega_p}\cos \Omega t\right)}{(x_m^o)^2 \left[\left(\frac{\lambda_1}{\omega_p}\right)^2 + \left(\frac{\Omega}{\omega_p}\right)^2\right]}$$

$$\left. - \sum_{n=2}^{\infty} \Lambda D'_n e^{-\left(\frac{\lambda_n}{\omega_p}\right)\left(\frac{\omega_p}{\Omega}\right)(\Omega t)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(x_m^o)^2} \frac{\nu}{\frac{\lambda_n}{\omega_p}\nu - (x_m^o)^2} \right\}$$

et

$$\frac{W}{\omega_p h_o} = \frac{\varepsilon K}{2} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} (a_o + \Lambda a_1) e^{-\left(\frac{\lambda_1}{\omega_p}\right)\left(\frac{\omega_p}{\Omega}\right)(\Omega t)} \frac{J_o\left(x_m^o \frac{r}{R}\right)}{J_1(x_m^o)\, x_m^o} + \right.$$

(II.14)

$$\left. + \sum_{n=2}^{\infty} \Lambda D'_n e^{-\left(\frac{\lambda_n}{\omega_p}\right)\left(\frac{\omega_p}{\Omega}\right)(\Omega t)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\frac{\lambda_n}{\omega_p}\nu}{\frac{\lambda_n}{\omega_p}\nu - (x_m^o)^2} \frac{J_o\left(x_m^o \frac{r}{R}\right)}{x_m^o J_1(x_m^o)} \right\}$$

avec Λ , K, D'_n des coefficients fonctions du seul paramètre ν a_o et a_1 étant donnés par l'équation (II.10) α_m et β_m par les équations (II.12).

II-4-2 Régime apériodique

Les conditions aux limites sont les mêmes que dans le cas précédent. La seule différence provient des termes en $\frac{\omega_1}{\omega_p}$. Les solutions $i\frac{\lambda'_1}{\omega_p}$ et $i\frac{\lambda''_1}{\omega_p}$ remplacent les solutions

$$\pm\frac{\Omega}{\omega_p} + i\frac{\lambda_1}{\omega_p}$$

Par un calcul analogue au précédent nous obtenons avec les mêmes notations :

$$\frac{h_t}{h_o} = \varepsilon K\left[-e^{-\frac{\lambda'_1}{\omega_p}(\omega_p t)}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\nu}{\frac{\lambda'_1}{\omega_p}\nu-(x_m^o)^2} - \Lambda e^{-\frac{\lambda''_1}{\omega_p}(\omega_p t)}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\nu}{\frac{\lambda''_1}{\omega_p}\nu-(x_m^o)^2}\right.$$

$$\left.-\sum_{n=2}^{\infty}\Lambda D'_n\, e^{-\frac{\lambda_n}{\omega_p}(\omega_p t)}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\nu}{\frac{\lambda_n}{\omega_p}\nu-(x_m^o)^2}\right] \qquad (II.15)$$

$$\frac{W}{\omega_p h_o} = \frac{\varepsilon K}{2}\left[e^{-\frac{\lambda'_1}{\omega_p}(\omega_p t)}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\frac{\lambda'_1}{\omega_p}\nu}{\frac{\lambda'_1}{\omega_p}\nu-(x_m^o)^2}\,\frac{J_o(x_m^o\,\frac{r}{R})}{x_m^o\,J_1(x_m^o)}\right.$$

$$+\Lambda\, e^{-\frac{\lambda''_1}{\omega_p}(\omega_p t)}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\frac{\lambda''_1}{\omega_p}\nu}{\frac{\lambda''_1}{\omega_p}\nu-(x_m^o)^2}\,\frac{J_o(x_m^o\,\frac{r}{R})}{x_m^o\,J_1(x_m^o)} \qquad (II.16)$$

$$\left.+\sum_{n=2}^{\infty}\Lambda D'_n\, e^{-\frac{\lambda_n}{\omega_p}(\omega_p t)}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\frac{\lambda_n}{\omega_p}\nu}{\frac{\lambda_n}{\omega_p}\nu-(x_m^o)^2}\,\frac{J_o(x_m^o\,\frac{r}{R})}{x_m^o\,J_1(x_m^o)}\right]$$

II-4-3 Etude du cas limite $\nu \to 0$

Pour $\nu < 1$, nous avons en posant $x = \sqrt{-i \frac{\omega}{\omega_p} \nu}$

$$J_1(x) \simeq \frac{x}{2} - \frac{x^3}{16}$$

$$J_0(x) \simeq 1 - \frac{x^2}{4}$$

II-4-3-1 Expression de $\frac{\lambda}{\omega_p}$ et de $\frac{\Omega}{\omega_p}$

Tenant compte des développements précédents l'équation (II.6) peut s'écrire :

$$-\frac{x^4}{\nu^2} = 1 - \frac{1 - \frac{x^2}{8}}{1 - \frac{x^2}{4}}$$

D'où

$$-\frac{x^4}{\nu^2} = -\frac{x^2}{8}$$

C'est à dire

$$-i\left(\frac{\Omega}{\omega_p} + i\frac{\Delta}{\omega_p}\right)\nu = \frac{\nu^2}{8}$$

Par suite

$$\frac{\Omega}{\omega_p} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\lambda}{\omega_p} = \frac{1}{8}\nu$$

II-4-3-2 Expression de $\frac{W}{\omega_p h_o}$

Nous avons établi (équation II.5)

$$\frac{W}{\omega_p h_o} = \sum_{n=1}^{\infty} -i\frac{\lambda_n}{\omega_p}\left[1 - \frac{J_o\sqrt{-i\frac{\omega_n}{\omega_p}\nu}\,\frac{r}{R}}{J_o\sqrt{-i\frac{\omega_n}{\omega_p}\nu}}\right] e^{i\frac{\omega_n}{\omega_p}(\omega_p t)}$$

En utilisant le développement de $J_o(x)$ limité aux deux premiers termes, on obtient l'expression :

$$\frac{W}{\omega_p h_o} = \left[1 - \frac{1 - \frac{\frac{1}{8}\vartheta^2 \left(\frac{r}{R}\right)^2}{4}}{1 - \frac{\frac{1}{8}\vartheta^2}{4}} \right] \sum_{n=1}^{\infty} - i \frac{\chi_n}{\frac{\omega_n}{\omega_p}} e^{i \frac{\omega_n}{\omega_p} (\omega_p t)}$$

qui peut s'écrire, en tenant compte de l'équation (II.4)

$$\frac{W}{\omega_p h_o} = \frac{\vartheta}{4} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right] \left(- \frac{h_o}{R} \frac{\partial p'^*}{\partial z'^*} \right)$$

Si nous désignons par $\left(\frac{W}{\omega_p h_o}\right)_{max}$ la vitesse sur l'axe du tube

et $\left(\frac{W}{\omega_p h_o}\right)_{moy}$ la vitesse moyenne dans une section du tube le rapport

$$\frac{\left(\frac{W}{\omega_p h_o}\right)_{max}}{\left(\frac{W}{\omega_p h_o}\right)_{moy}}$$ tend vers 2 lorsque $\vartheta \longrightarrow 0$

Lorsque ϑ tend vers zéro, $\frac{\Omega}{\omega_p}$ et $\frac{\lambda}{\omega_p}$ tendent vers zéro le caractère oscillatoire de l'écoulement disparait et la quantité

$- \frac{h_o}{R} \frac{\partial p'^*}{\partial z'^*} = \frac{h_t}{h_o}$ est une constante. La distribution de vitesse obtenue précedemment est alors identique à la loi de Poiseuille concernant l'écoulement laminaire permanent.

II-4-4 Remarques sur les équations (II.13), (II.14), (II.15) et (II.16)

Les équations (II.13), (II.14), (II.15) et (II.16) permettent, en tenant compte de l'équation (II.6) donnant les valeurs de $\frac{\lambda_n}{\omega_p}$ et de $\frac{\Omega}{\omega_p}$, de calculer pour toute valeur de ν l'évolution au cours du temps du rapport $\frac{h_t}{h_o}$ ainsi que l'évolution des profils des vitesses instantanées. Une remarque s'impose à propos du nombre de termes partiels apériodiques intervenant dans les développements en série des équations considérées.

En effet, il faut noter que:

- Pour une valeur donnée du paramètre ν l'influence de ces termes est surtout sensible au début du mouvement. Lorsque Ωt croît les $n^{ièmes}$ puis $(n-1)^{ième}$ etc... termes des développements deviennent négligeables par rapport aux précédents.

- Puisque $\frac{\lambda_n}{\omega_p}$ ($n \geqslant 2$) tend vers l'infini quand ν tend vers 0 le nombre de partiels à considérer est fonction croissante de ν. Pour les très petites valeurs de ν les termes partiels apériodiques doivent être négligeables.

En ce qui concerne l'évolution au cours du temps de la vitesse $\frac{W}{\omega_p h_o}$, dans le cas des régimes apériodiques, on peut noter que la condition $(\frac{W}{\omega_p h_o})_{\omega_p t = 0}$ implique que la vitesse en un point donné doit passer par un maximum avant de décroitre exponentiellement avec le temps.

Pour $\nu > \nu^*$ et pour $\nu < \nu^*$ puisque la vitesse est nulle à l'instant initial les profils de vitesse au début du mouvement devront avoir la forme caractéristique des profils type couche limite.

II-5- ETUDE DE L'AMORTISSEMENT (REGIMES OSCILLATOIRES)

Si nous nous plaçons dans l'une des branches de l'U, par exemple celle de gauche, dans laquelle nous avons provoqué une dénivellation initiale h_o vers le bas à partir de la position d'équilibre, les maxima successifs de la position du ménisque dans cette branche se produiront aux instants $(2k-1)\pi$ du mouvement ($k = 1, 2.....n$). La valeur de l'amortissement entre la $k^{ième}$ et la $(k+1)^{ième}$ oscillation sera donnée par

$$\frac{h_{(2k-1)\pi}}{h_{(2k+1)\pi}}$$

avec

$$\frac{h_{(2k-1)\pi}}{h_o} = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{\lambda_1}{\Omega}(2k-1)\pi} \frac{(\alpha_m+\Lambda\beta_m)(\frac{\lambda_1}{\omega_p})-(\beta_m-\Lambda\alpha_m)(\frac{\Omega}{\omega_p})}{(x_m^o)^2\left[(\frac{\lambda_1}{\omega_p})^2+(\frac{\Omega}{\omega_p})^2\right]}$$

$$-\sum_{n=2}^{\infty}\Lambda D'_n\, e^{-\frac{\lambda_n}{\Omega}(2k-1)\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(x_m^o)^2}\,\frac{\nu}{\frac{\lambda_n}{\omega_p}\nu-(x_m^o)^2}$$

et

$$\frac{h(2k+1)\pi}{h_o} = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{\lambda_1}{\Omega}(2k+1)\pi} \frac{(\alpha_m+\Lambda\beta_m)(\frac{\lambda_1}{\omega_p})-(\beta_m-\Lambda\alpha_m)(\frac{\Omega}{\omega_p})}{(x_m^o)^2\left[(\frac{\lambda_1}{\omega_p})^2+(\frac{\Omega}{\omega_p})^2\right]} \qquad (II.17)$$

$$-\sum_{n=2}^{\infty}\Lambda D'_n\, e^{-\frac{\lambda_n}{\Omega}(2k+1)\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(x_m^o)^2}\,\frac{\nu}{\frac{\lambda_n}{\omega_p}\nu-(x_m^o)^2}$$

Lorsqu'on ne tient compte que de la première partie de l'équation (II.17) c'est à dire lorsqu'on néglige les termes partiels apériodiques on vérifie aisément que

$$\frac{h_{(2k-1)\pi}}{h_{(2k+1)\pi}} = e^{2\pi \frac{\lambda_1}{\Omega}} \qquad (II.18)$$

L'amortissement, pour une expérience donnée est alors constant au cours des oscillations successives.

Avec l'hypothèse d'un écoulement purement axial nous avons établi dans ce chapitre l'expression des solutions des équations du mouvement. Ces solutions sont toutefois très complexes et ne peuvent être exploitées que par une étude numérique. Cette étude fait l'objet du prochain chapitre.

CHAPITRE III

RESULTATS THEORIQUES

Pour une valeur de $\mathcal{V}$, la distribution des vitesses instantanées est donnée par les expressions (II.14) ou (II.16) selon que le régime est oscillatoire ou apériodique, l'amortissement par les expressions (II.17), les valeurs de $\frac{\Omega}{\omega_p}$ et des $\frac{\lambda_n}{\omega_p}$ qui interviennent dans ces expressions sont déterminées par l'équation (II.6).

Le calcul de $\frac{\Omega}{\omega_p}$ et des $\frac{\lambda_n}{\omega_p}$, de la distribution de vitesse instantanée et de l'amortissement a été effectué, pour différentes valeurs de $\mathcal{V}$, sur un calculateur électronique IBM 360-44. Différentes quantités que nous considérons au cours de ce chapitre, vitesse moyenne, tourbillon, coefficient de frottement ont été aussi calculées.

Le programme de calcul est donné en annexe.

III.1. CALCUL DE $\frac{\Omega}{\omega_p}$ ET DES $\frac{\lambda_n}{\omega_p}$ (EQUATION (II.6))

Ce calcul a été effectué au chapitre précédent. Nous rappelons brièvement les résultats obtenus.

III.1.1. $\vartheta \leq \vartheta^*$ (régime apériodique)

(Voir figure 2)

III.1.2. $\vartheta > \vartheta^*$ (régime oscillatoire)

Les valeurs de $\pm \frac{\Omega}{\omega_p} + i \frac{\lambda_1}{\omega_p}$ et de $\frac{\lambda_n}{\omega_p}$ ont été calculées pour différentes valeurs de ϑ. La figure (3) montre en coordonnées logarithmiques la représentation de $\frac{\lambda_1}{\omega_p}$, de $\frac{\Omega}{\omega_p}$ et de $\frac{\lambda_n}{\omega_p}$ en fonction de ϑ.

Nous avons aussi tracé sur cette figure la courbe $\frac{\lambda_1}{\omega_p} = 2{,}5\ \vartheta^{-0{,}9}$ valable pour $3{,}436 < \vartheta < 20$, obtenue[13] en négligeant les termes apériodiques, ainsi que la courbe $\frac{\lambda_1}{\omega_p} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \vartheta^{-1/2}$ valable pour $\vartheta > 64$ et obtenue en utilisant les développements asymptotiques des fonctions de Bessel. Ces courbes sont en bon accord avec les résultats obtenus numériquement.

La représentation de $1 - \frac{\Omega}{\omega_p}$ en fonction de ϑ (figure 3 bis) conduit à l'expression :

$$\frac{\Omega}{\omega_p} = 1 - 0{,}6\ \vartheta^{-0{,}46}$$

valable pour $\vartheta > 10$.

L'utilisation des développements asymptotiques des fonctions de Bessel permet d'établir[13] pour $\frac{\Omega}{\omega_p}$ l'expression valable pour $\mathcal{V} > 64$

$$\frac{\Omega}{\omega_p} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{V}^{-0,5}$$

qui est en parfait accord avec la précédente.

III.2. VITESSE INSTANTANEE

La valeur de la vitesse adimensionnelle instantanée $\frac{W}{\omega_p h_o}$, fonction de $\frac{r}{R}$ et de $\mathcal{V}$, mais indépendante de $\frac{h_o}{R}$, a été calculée pour les valeurs suivantes de $\mathcal{V}$: 1 ; 2,06 ; 3,4 (régimes apériodiques) et 8,5 ; 15,3 ; 25 ; 28,5 ; 30 ; 33 ; 35,8 ; 46,9 ; 62,2 ; 100 ; 138 ; 177 ; 206 ; 260 et 400 (régimes oscillatoires et pour chaque valeur de $\mathcal{V}$, pour dix valeurs de $\omega_p t$ comprises entre 0 et 30 ou pour quinze valeurs de Ωt comprises entre 0 et 3π selon que $\mathcal{V} \leqslant \mathcal{V}^*$ ou $\mathcal{V} > \mathcal{V}^*$; le balayage $\frac{r}{R}$ se faisant avec le pas $\frac{\Delta r}{R} = 0,1$ ou $\frac{\Delta r}{R} = 0,025$.

Pour que la comparaison avec l'étude expérimentale soit facilitée, nous avons supposé que l'écoulement de départ correspond à une montée de la colonne fluide.

III.2.1. Régimes apériodiques ($\mathcal{V} \leqslant \mathcal{V}^*$)

Les profils des vitesses instantanées correspondant à différentes valeurs de $\omega_p t$ comprises entre 0 et 30 sont représentés dans la figure (5) pour $\mathcal{V} = 3,4$ et dans la figure (4) pour $\mathcal{V} = 2,04$.

En un point donné de la section la valeur de la vitesse est, quel que soit $\mathcal{V}$, maximale pour $\omega_p t = 1$, puis décroît ensuite très rapidement ; pour $\omega_p t = 10$ ($\mathcal{V} = 3,4$) et $\omega_p t = 20$ ($\mathcal{V} = 2,06$) elle est pratiquement nulle.

Pour un $\mathcal{V}$ donné le profil des vitesses passe au cours du temps de la forme couche limite à la forme parabolique

III-2-2 Régimes oscillatoires ($\mathcal{V} > \mathcal{V}^*$)

III-2-2-1 Variation de la vitesse instantanée en un point donné avec $\mathcal{V}$

La variation en fonction de $\mathcal{V}$ de la vitesse au centre du tube à l'instant $\Omega t = \frac{\pi}{2}$, est représentée dans la figure (6). Le rapport $\frac{W}{\omega_p h_o}$ croît très rapidement, passe pour $\mathcal{V} = 25$ par la valeur maximale 1,15 puis décroit en tendant vers la valeur asymptotique 1,05.

III-2-2-2 Profils des vitesses instantanées

L'évolution au cours du temps du profil des vitesses correspondant à une valeur de $\mathcal{V}$, est analysée à l'aide des figures (7) à (15) qui donnent les profils des vitesses aux instants $\Omega t = k \frac{\pi}{4}$ dans l'intervalle $0 < \Omega t \leqslant 3\pi$, respectivement pour les valeurs suivantes de $\mathcal{V}$: 8,5 ; 15,3 ; 28,5 ; 46,9 ; 62,2 ; 138 ; 177 ; 260 et 400.

Les profils des vitesses à l'instant $\Omega t = \frac{\pi}{2}$ correspondants aux valeurs précédentes de $\mathcal{V}$ sont regroupés dans la figure (16).

Avant d'indiquer sous forme de tableau comment évolue, au cours du temps et suivant la valeur de $\mathcal{V}$, la forme des profils des vitesses, nous allons définir les formes caractéristiques de profil observées que nous classons en deux groupes, chacun d'eux étant divisé en trois sous-groupes (Fig : 17 et 18).

Groupe I - Profils couche limite

La vitesse varie depuis la paroi jusqu'à la distance r_ℓ de l'axe, puis garde une valeur constante jusqu'à l'axe, la région $R < r < r_\ell$ est appelée noyau central.* Les trois sous-groupes sont définis selon la nature de la variation de la vitesse dans la couche limite.

Considérons d'abord les seuls profils pour lesquels la vitesse est soit toujours positive, soit toujours négative dans la section.

Depuis la paroi jusqu'à la distance $r = r_\ell$, c'est à dire dans la couche limite,

- dans le sous-groupe 1, profils couche limite $_1$, le module de la vitesse croît de façon continue.

- dans le sous-groupe 2, profils couche limite $_2$, le module de la vitesse passe par un maximum.

- dans le sous-groupe 3, profils couche limite $_3$, le module de la vitesse passe par un maximum puis par un minimum.

Groupe II - Profils pleinement développés

Les profils sont "pleinement développés" lorsque la vitesse varie depuis la paroi jusqu'à l'axe. On peut considérer que la couche limite intéresse alors tout le tube (c'est à dire r_ℓ tend vers zéro).

Considérons ici encore les seuls profils pour lesquels la vitesse est toujours positive ou toujours négative dans la section.

---

* L'épaisseur de la couche limite est donc définie par

$$\delta = R - r_\ell$$

Aux trois sous-groupes du groupe I, correspondent respectivement les trois sous-groupes suivants :

De la paroi jusqu'à l'axe du tube,

- dans le sous-groupe 1, profils pleinement développés $_1$, le module de la vitesse croit de façon continue (il atteint donc sa valeur maximale sur l'axe),

- dans le sous-groupe 2, profils pleinement développés $_2$, le module de la vitesse passe par un maximum puis décroit ensuite jusqu'à l'axe du tube (cette forme correspond au profil RICHARDSON),

- dans le sous-groupe 3, profils pleinement développés $_3$, le module de la vitesse passe par un maximum, puis par un minimum avant de croître jusqu'à un deuxième maximum sur l'axe du tube.

Dans le cas où la vitesse s'annule en un point de la section défini par $r = r_I$ (c'est le cas aux instants Ωt égaux ou voisins de $k\pi$), le module dela vitesse passe par un maximum pour $r_I < r < R$. Pour $r \leqslant r_I$ la forme du profil peut être assimilée à l'une des six formes précédemment définies (profils 1', 2', 3').

L'analyse des figures (7) à (15), en ce qui concerne la forme des profils, est résumée dans les tableaux suivants correspondant respectivement à $\nu \leqslant 46$ et $\nu > 46$

tableau III.1

$\vartheta \leqslant 46$

Ωt			
0	Couche limite $_1$	$\Omega t_1 \leqslant \frac{\pi}{2}$	$\vartheta \leqslant 25$
Ωt_1	pleinement développé $_1$	$\frac{\pi}{2} < \Omega t_1 \leqslant \pi$	$25 < \vartheta \leqslant 46$
π	pleinement développé $_2$	$\pi < \Omega t_2 \leqslant \frac{3\pi}{2}$	$\vartheta \leqslant 25$
Ωt_2	pleinement développé $_1$	$\frac{3\pi}{2} < \Omega t_2 \leqslant 2\pi$	$25 < \vartheta \leqslant 46$
2π	pleinement développé $_2$	$2\pi < \Omega t_3 \leqslant \frac{5\pi}{2}$	$\vartheta \leqslant 25$
Ωt_3	pleinement développé $_1$	$\frac{5\pi}{2} < \Omega t_3 \leqslant 3\pi$	$25 < \vartheta \leqslant 46$
3π			

tableau III.2

$\vartheta > 46$

Ωt				
0	Couche limite $_1$			
π	Couche limite $_2$	$\Omega t_4 = \pi$	$\vartheta = 46$	
		$\Omega t_4 = 2\pi$	$\vartheta = 150$	
Ωt_4	pleinement développé $_2$			
2π	$\vartheta < 100$ pleinement développé $_2$	$150 \geqslant \vartheta \geqslant 100$ pleinement développé $_3$	$\vartheta > 150$ couche limite $_3$	$\Omega t_5 = 3\pi$ pour $\vartheta = 400$
Ωt_5			pleinement développé $_3$	
3π				

Nous relevons dans les tableaux les résultats suivants

1°) Quelle que soit la valeur de ν, le profil est du type couche limite, pour Ωt compris entre 0 et Ωt_1 avec Ωt_1 d'autant plus grand que ν est plus grand. On a ainsi $\Omega t_1 = \frac{\pi}{2}$ pour $\nu = 25$, $\Omega t_1 = \pi$ pour $\nu = 46$, $\Omega t_1 = 2\pi$ pour $\nu = 150$.

La dimension du noyau central est pour une valeur donnée de Ωt fonction croissante de ν et pour une valeur donnée de ν fonction décroissante de Ωt.

2°) A l'instant $\Omega t = \frac{\pi}{2}$ le profil des vitesses est

a) pour $\nu \leqslant 25$ du type pleinement développé (1) c'est à dire croissance continue de la vitesse maximum sur l'axe.

b) pour $\nu > 25$ du type couche limite (1) c'est à dire croissance continue de la vitesse dans la couche limite. (Ce résultat est confirmé par la figure 16).

3°) Lors de la première montée $0 \leqslant \Omega t \leqslant \pi$, le profil appartient quel que soit ν, au sous-groupe 1.

Lors de la première descente $\pi < \Omega t \leqslant 2\pi$ le profil ne peut appartenir au sous-groupe 1 que si $\nu < 46$ et dans ce cas entre les instants Ωt_2 et 2π seulement, avec $\Omega t_2 = \frac{3\pi}{2}$ pour $\nu = 25$ et $\Omega t_2 = 2\pi$ pour $\nu = 46$.

Ce résultat sera rappelé lors de la comparaison des profils des vitesses expérimentaux et théoriques.

4°) les valeurs 25 et 46 de ν apparaissent être des valeurs caractéristiques de l'écoulement .

III-3- COUCHE LIMITE

L'épaisseur relative de la couche limite $\frac{\delta}{R}$ est déterminée à l'aide des profils des vitesses instantanées, elle dépend donc de $\mathcal{V}$ et de Ωt.

III-3-1- Variation de $\frac{\delta}{R}$ en fonction de Ωt pour une valeur de $\mathcal{V}$ donnée

Nous avons dans la figure (19) représenté l'évolution de $\frac{\delta}{R}$ au cours de la première période du mouvement pour les valeurs suivantes de $\mathcal{V}$: 8,5 ; 15,3 ; 25 ; 30 ; 35,8 ; 46,9 ; 62,2 ; 100 ; 138 ; 177 ; 260.

Pour un $\mathcal{V}$ donné, $\frac{\delta}{R}$ est une fonction croissante de Ωt ; pour un Ωt donné $\frac{\delta}{R}$ est une fonction décroissante de $\mathcal{V}$

A chaque valeur de $\mathcal{V}$ correspond, comme il a été vu dans les tableaux III.1 et III.2 une valeur Ωt_1 de Ωt au-dessous de laquelle l'écoulement est du type couche limite et au-dessus de laquelle l'écoulement est pleinement développé. La durée du régime à couche limite est fonction croissante de $\mathcal{V}$ (III.2.2.2.)

L'allure des courbes précédentes nous a conduit à tracer dans la figure (20), pour les mêmes valeurs de $\mathcal{V}$ que précedemment, les courbes représentatives de la variation de $\frac{\delta}{R}$ en fonction de $\sqrt{\Omega t}$.

Cette figure montre que la variation de $\frac{\delta}{R}$ en fonction de $\sqrt{\Omega t}$ est linéaire pour $\mathcal{V} \leqslant 25$.

III-3-2- Variation de $\frac{\delta}{R}$ en fonction de $\mathcal{V}$ pour une valeur de Ωt donnée.

Nous avons représenté dans la figure (21), la variation en coordonnées logarithmiques de $\frac{\delta}{R}$ en fonction de $\mathcal{V}$ pour les valeurs successives de Ωt : $\frac{0,125}{10}\pi$; $\frac{0,5}{10}\pi$; $\frac{\pi}{10}$; $\frac{2\pi}{10}$; $\frac{3\pi}{10}$;

$\frac{5\pi}{10}$; $\frac{7\pi}{10}$; π ; $\frac{15\pi}{10}$; 2π . Conformément avec ce que nous avons vu précedemment, ces différentes courbes correspondent au domaine de variation de ϑ défini par $\vartheta > \vartheta_\ell$ avec ϑ_ℓ une fonction croissante de Ωt (par exemple pour $\Omega t = \frac{\pi}{2}$ $\vartheta_\ell = 25$).

La courbe représentative de $\frac{\delta}{R}$ en fonction de ϑ, correspondant à une valeur de Ωt donnée est formée par deux droites se coupant pour $\vartheta = 25$.*

Il est donc nécessaire d'étudier successivement les cas $\vartheta \leqslant 25$ et $\vartheta > 25$.

III-3-2-1- Cas $\vartheta \leqslant 25$

Les courbes représentatives de $\frac{\delta}{R}$ en fonction de ϑ sont des droites parallèles de pente - 0,6

Par suite nous avons

$$\frac{\delta}{R} = k\ \vartheta^{-0,6}\ f(\Omega t)$$

III-3-2-2- Cas $\vartheta > 25$

Les courbes représentatives de $\frac{\delta}{R}$ en fonction de ϑ sont des droites concourantes au point $\vartheta = 1$, $\frac{\delta}{R} = 5$. Par suite

$\frac{\delta}{R} = 5\ \vartheta^{\ p(\Omega t)}$ où $p(\Omega t)$ représente la pente de ces droites.

Il s'agit maintenant de déterminer $p(\Omega t)$ et $f(\Omega t)$.

---

* Remarque : Pour les courbes correspondant à $\Omega t > \frac{\pi}{2}$, alors $\vartheta_\ell > 25$, la courbe de variation de $\frac{\delta}{R}$ en fonction de ϑ est une droite unique.

III-3-3- Variation de $\frac{\delta}{R}$ en fonction de Ωt et de ϑ

III-3-3-1- Cas $\vartheta \leq 25$

La figure (20) montre que pour $\vartheta \leq 25$ le rapport

$\frac{\bar{R}}{\sqrt{\Omega t}}$ est fonction seulement de ϑ

Par suite

$$f(\Omega t) = \sqrt{\Omega t}$$

On trouve d'autre part k = 5,8

D'où $$\frac{\delta}{R} = 5,8\ \vartheta^{-0,6}\ \sqrt{\Omega t}$$

III-3-3-2- Etude du cas $\vartheta > 25$

Nous avons relevé dans la figure (21) la pente $p(\Omega t)$ de chaque droite représentant la variation de $\frac{\delta}{R}$ en fonction de ϑ . La figure (22a) donne la variation de p en fonction de Ωt. La forme de la courbe $p(\Omega t)$ et les résultats de la figure (20) nous ont conduit à tracer dans la figure (22b) en coordonnées semi-logarithmiques la variation de p en fonction de $\sqrt{\Omega t}$. La courbe représentative obtenue est constituée par deux demi-droites concourantes pour $\sqrt{\Omega t} = 1$.

Pour $\sqrt{\Omega t} > 1$ nous avons

$$p(\Omega t) = - 0,78\ e^{-0,35\ \sqrt{\Omega t}}$$

Pour $\sqrt{\Omega t} < 1$ nous avons

$$p(\Omega t) = - 1,15\ e^{-0,7\ \sqrt{\Omega t}}$$

III-3-4- Lois de variation de l'épaisseur de la couche limite

Les précédents résultats permettent d'établir les lois suivantes :

1°) $\vartheta \leqslant 25$:

$$\frac{\delta}{R} = 5{,}8\ \vartheta^{-0,9}\ \sqrt{\Omega t}$$

2°) $\vartheta > 25$:

α) $\Omega t > 1$

$$\frac{\delta}{R} = 5\ \vartheta^{-0,78}\ e^{-0,35\ \sqrt{\Omega t}} \qquad \text{(III.1)}$$

β) $0{,}04 \leqslant \Omega t \leqslant 1$

$$\frac{\delta}{R} = 5\ \vartheta^{-1,15}\ e^{-0,7\ \sqrt{\Omega t}}$$

γ) $0 \leqslant \Omega t < 0{,}04$

$$\frac{\delta}{R} = \frac{20}{\vartheta}\ \sqrt{\Omega t}$$

III-4- VITESSE MOYENNE DANS LA SECTION A L'INSTANT t

La vitesse moyenne dans la section à l'instant t est définie par :

$$\frac{W_m}{\omega_p h_o} = 2 \int_0^1 \frac{W}{\omega_p h_o}\ \frac{r}{R}\ d\ \frac{r}{R} \qquad \text{(III.2)}$$

avec la condition (non imposée par les conditions aux limites)

$$\left(\frac{\dot{W}_m}{\omega_p h_o}\right)_{\Omega t = k\pi} = 0 \qquad \text{(III.3)}$$

Nous avons calculé, par intégration numérique, les valeurs de $\frac{\dot{W}_m}{\omega_p h_o}$ correspondant aux différentes valeurs de ϑ et de Ωt choisies pour le calcul de la vitesse instantanée.

La figure (23) donne l'évolution au cours du temps de $\frac{\dot{W}_m}{\omega_p h_o}$ pour les valeurs suivantes de ϑ : 8,5 ; 15,3 ; 30 ; 62,2 ; 206.

Nous constatons que la condition (III.3) est approximativement satisfaite.

III-5- CALCUL DU VECTEUR TOURBILLON

L'écoulement étant par hypothèse parallèle le vecteur tourbillon admet une seule composante qui est azimutale et que nous désignons par η .

Les figures 24 et 25 montrent pour $\vartheta = 15,3$ et $\vartheta = 206$ et pour $\Omega t = \frac{2\pi}{10}, \frac{5\pi}{10}, \frac{7\pi}{10}, \pi, \frac{13\pi}{10}, \frac{15\pi}{10}$ et 2π la variation de η en fonction de $\frac{r}{R}$. Nous analysons successivement ces deux figures :

α) $\vartheta = 15,3$ (fig : 24)

Pour $\frac{r}{R} = 0$, $\eta = 0$. Lorsque $\frac{r}{R}$ croit de 0 à 1, η passe toujours par un seul extremum qui suivant la valeur de Ωt se trouve soit au point d'abscisse $\frac{r}{R} = 1$, soit en un point d'abscisse $\frac{r}{R}$ tel que $0 < \frac{r}{R} < 1$.

β) $\mathcal{V}$ = 206 (fig : 25)

Il faut remarquer tout d'abord que quel que soit Ωt la fonction η est constamment nulle sur un domaine de valeurs de $\frac{r}{R}$, centré sur l'axe du tube, dont la dimension est fonction décroissante de Ωt. Le domaine des valeurs de $\frac{r}{R}$ où η prend des valeurs finies non nulles correspond à la région où se manifestent les effets de viscosité c'est à dire à la couche limite. De plus, la courbe représentative de η admet un ou deux extréma suivant les valeurs de Ωt. L'extremum pour $\frac{r}{R} = 1$ existe ici quel que soit Ωt.

La figure 26 donne la répartition des zéros de η pour $\mathcal{V}$ = 15,3 ; 25 ; 62,2 ;206 lorsque Ωt varie de $\frac{7\pi}{10}$ à 2π. Le premier zéro de η prend naissance à la paroi pour $\frac{7\pi}{10} < \Omega t < \frac{8\pi}{10}$ et se déplace au cours du temps vers l'axe du tube. La durée de l'existence de ce zéro est fonction croissante de $\mathcal{V}$.

La figure 27 montre, pour $\mathcal{V}$ = 20 ; 30 ; 62,2 ; 206 l'évolution au cours du temps de $\left[\eta\right]_{\frac{r}{R}=1}$. En accord avec les résultats de la figure 26 $\left[\eta\right]_{\frac{r}{R}=1}$ s'annule pour $\frac{7\pi}{10} < \Omega t < \frac{8\pi}{10}$ lors de la première montée et pour $\frac{17\pi}{10} < \Omega t < \frac{18\pi}{10}$ lors de la première descente.

A l'instant ou $\left[\eta\right]_{\frac{r}{R}=1}$ s'annule, des courants de retour prennent naissance au voisinage de la paroi du tube. Ils s'étendent ensuite au cours du temps au sein de la masse fluide de telle manière que pour $\Omega t = k\pi$ la vitesse moyenne dans une sectio soit nulle. De plus pour $\mathcal{V}$ = 206 la valeur maximale du module de $\left[\eta\right]_{\frac{r}{R}=1}$ est plus grande lors de la première descente que lors de la première montée. Nous avons vérifié que l'égalité est réalisée au voisinage de $\mathcal{V}$ = 150.

III-6- COEFFICIENT DE FROTTEMENT

III-6-1- Définitions

Nous considérons successivement le coefficient de frottement instantané C_{fi} et le coefficient de frottement moyen $\overline{C_f}$.

Le coefficient de frottement instantané C_{fi} est défini par

$$C_{fi} = \frac{2\pi\ RL\mu\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)_{r=R}}{(2\pi RL)\left(\frac{1}{2}\ \rho(W_m)^2\right)} \qquad (III.4)$$

c'est à dire

$$C_{fi} = 2\left(\mathcal{V}\frac{h_o}{R}\right)^{-1} \frac{\left[\frac{\partial\left(\frac{W}{\omega_p h_o}\right)}{\partial\left(\frac{r}{R}\right)}\right]_{\frac{r}{R}=1}}{\left(\frac{W_m}{\omega_p h_o}\right)^2}$$

Le coefficient de frottement moyen dans une période C_f est défini par

$$\overline{C_f} = 2\left(\mathcal{V}\frac{h_o}{R}\right)^{-1} \frac{\left[\overline{\frac{\partial\left(\frac{W}{\omega_p h_o}\right)}{\partial\left(\frac{r}{R}\right)}}\right]_{\frac{r}{R}=1}}{\left(\frac{\overline{W_m}}{\omega_p h_o}\right)^2} \qquad (III.5)$$

$\left[\overline{\frac{\partial\left(\frac{W}{\omega_p h_o}\right)}{\partial\left(\frac{r}{R}\right)}}\right]_{\frac{r}{R}=1}$ désigne la demi somme de la valeur moyenne de

$\left[\frac{\partial\left(\frac{W}{\omega_p h_o}\right)}{\partial\left(\frac{r}{R}\right)}\right]_{\frac{r}{R}=1}$ entre 0 et π et de la valeur moyenne de cette même quantité entre π et 2π ; $\left(\frac{\overline{W}_m}{\omega_p h_o}\right)$ désigne la demi-somme de la valeur moyenne de $\frac{W_m}{\omega_p h_o}$ entre 0 et π et de la valeur moyenne de cette même quantité entre π et 2π .

Nous avons calculé les valeurs des coefficients C_{fi} et $\overline{C}_f$, correspondant aux différentes valeurs de $\mathcal{V}$ et de Ωt choisies pour le calcul de la vitesse instantanée.

III-6-2- Calcul du coefficient de frottement instantané

La relation (III.4) peut s'écrire sous la forme

$$C_{fi}\left(\mathcal{V}\frac{h_o}{R}\right) = 2\,\frac{\left[\frac{\partial\left(\frac{W}{\omega_p h_o}\right)}{\partial\left(\frac{r}{R}\right)}\right]_{\frac{r}{R}=1}}{\left(\frac{W_m}{\omega_p h_o}\right)^2} \qquad \text{(III.4 bis)}$$

Nous avons dans les figures (28) et (29) correspondant respectivement à $0 \leqslant \Omega t \leqslant \pi$ et $\pi \leqslant \Omega t \leqslant 2\pi$ tracé l'évolution au cours du temps du produit $C_{fi} \cdot \mathcal{V}\frac{h_o}{R}$ pour les valeurs suivantes de $\mathcal{V}$: 5;8,5 ; 12 ; 15,3 ; 25 ; 62,2 et 206.

L'analyse de ces figures montre que

1°) $C_{fi}.\mathcal{V}\frac{h_o}{R}$ tend vers l'infini lorsque Ωt tend vers $k\pi$. Ce résultat est la conséquence de la condition

$$\frac{W_m}{\omega_p h_o}(k\pi) = 0 \qquad \text{(équation III.3)}$$

2°) Pour $0 \leqslant \Omega t \leqslant \pi$

α) $\mathcal{V} \leqslant 8,5$, la courbe représentative de $C_{fi} \cdot \mathcal{V} \frac{h_o}{R}$ en fonction du temps passe par deux extrema (un maximum puis un minimum)

β) $8,5 < \mathcal{V} \leqslant 25$, $C_{fi} \cdot \mathcal{V} \frac{h_o}{R}$ reste approximativement constant pour $\frac{4\pi}{10} < \Omega t < \frac{7\pi}{10}$

γ) Pour $\mathcal{V} > 25$, $C_{fi} \cdot \mathcal{V} \frac{h_o}{R}$ est une fonction croissante de Ωt

3°) Pour $\pi \leqslant \Omega t \leqslant 2\pi$

α) $\mathcal{V} \leqslant 8,5$, la courbe représentative de $C_{fi} \cdot \mathcal{V} \frac{h_o}{R}$ en fonction du temps passe par deux extrema (un maximum puis un minimum).

β) Pour $8,5 < \mathcal{V} \leqslant 25$, $C_{fi} \cdot \mathcal{V} \frac{h_o}{R}$ reste approximativement constant pour $\frac{5\pi}{10} < \Omega t < \frac{7\pi}{10}$

) Pour $\mathcal{V} > 25$, $C_{fi} \cdot \mathcal{V} \frac{h_o}{R}$ est une fonction décroissante de Ωt

Remarque : la forme des courbes représentatives correspondant à $\mathcal{V} \leqslant 8,5$ s'explique par l'existence d'une région de transition entre les régimes oscillatoires et les régimes apériodiques. En effet pour $\mathcal{V} \leqslant \mathcal{V}^*$ lorsque $\omega_p t$ croit à partir de 0, $C_{fi} \cdot \mathcal{V} \frac{h_o}{R}$ passe par un seul extrémum qui est atteint lorsque la vitesse moyenne est maximale. Lorsque $\mathcal{V}$ croit à partir de $\mathcal{V} = \mathcal{V}^*$ la courbe représentative se déforme progressivement en prenant les formes caractéristiques que nous avons vues précedemment.

Cette représentation qui permet suivant les valeurs de $\mathcal{V}$ de suivre l'évolution du coefficient de frottement au cours du temps ne conduit pas à une représentation simple et unique en fonction du paramètre $\mathcal{V}$. C'est pourquoi nous avons considéré un coefficient de frottement moyen.

III-6-3- Calcul du coefficient de frottement moyen

La relation III,5 peut s'écrire

$$\overline{C_f}\left(\frac{\overline{W_m}}{\omega_p h_o}\right)\left(\mathcal{V}\frac{h_o}{R}\right) = 2 \cdot \frac{\left[\partial\left(\frac{\overline{W}}{\omega_p h_o}\right)\right]}{\partial\left(\frac{r}{R}\right)}\frac{r}{R}=1 \Big/ \left(\frac{W_m}{\omega_p h_o}\right) \qquad \text{(III.5 bis)}$$

Le second membre de cette équation est une fonction de $\mathcal{V}$ que nous désignons par $\varphi(\mathcal{V})$

Nous avons calculé les valeurs numériques de la fonction $\varphi(\mathcal{V})$ pour les valeurs suivantes de $\mathcal{V}$: 5 ; 8,5 ; 12 ; 15,3 ; 20 ; 23 ; 25 ; 30 ; 33 ; 35,8 ; 46,9 ; 62,2 ; 100 ; 138 ; 177 206 ; 260 et nous avons représenté (figure (30) la variation de la fonction $\varphi(\mathcal{V})$ en coordonnées logarithmiques.

L'analyse de cette figure montre que :

- $8,5 < \mathcal{V} \leq 25$:

$$\varphi(\mathcal{V}) = \text{constante} = 8,75$$

d'où

$$\overline{C_f}\left(\frac{\overline{W_m}}{\omega_p h_o}\right)\left(\mathcal{V}\frac{h_o}{R}\right) = 8,75$$

- $\vartheta > 25$

$$\varphi(\vartheta) = 2{,}4\,\vartheta^{0,4}$$

D'où

$$\overline{C_f}\ \left(\frac{\overline{W_m}}{\omega_p h_o}\right)\left(\vartheta\,\frac{h_o}{R}\right) = 2{,}4\,\vartheta^{0,4}$$

Par suite, les courbes représentatives (fig : 31) en coordonnées logarithmiques de $\overline{C_f}$ en fonction de

$\left(\frac{\overline{W_m}}{\omega_p h_o}\right)\left(\vartheta\,\frac{h_o}{R}\right)$ sont les suivantes :

1°) $8{,}5 < \vartheta \leqslant 25$; à une valeur donnée de ϑ, quelle que soit la valeur de $\frac{h_o}{R}$ et à une valeur donnée de $\frac{h_o}{R}$, quelle que soit la valeur de ϑ correspond une droite unique de pente - 1 passant par

le point $\left(\overline{C_f} = 8{,}75,\ \frac{\overline{W}}{\omega_p h_o} \cdot \vartheta\,\frac{h_o}{R} = 1\right)$

2°) $\vartheta > 25$; à chaque valeur de ϑ correspond une droite de pente - 1 et à chaque valeur de $\frac{h_o}{R}$ correspond une droite de pente - 0,7. On obtient ainsi un réseau de droites de pente - 1 graduées en ϑ et un réseau de droites de pente - 0,7 graduées en $\frac{h_o}{R}$, qui permet pour une valeur de ϑ et de $\frac{h_o}{R}$ données de déterminer rapidement la valeur de $\overline{C_f}$.

---

* Les valeurs de ϑ, définis par $\vartheta^* < \vartheta \leqslant 8{,}5$ appartiennent, ainsi que nous l'avons vu précedemment à un domaine transitoire.

III-7- CALCUL DE L'AMORTISSEMENT

L'amortissement est donné par les équations (II.17). Nous avons calculé, pour différentes valeurs de ϑ , les valeurs de l'amortissement au cours des oscillations successives. L'analyse de la figure (32) permet de dégager les lois suivantes :

Au cours des oscillations successives :

1°) Pour $\vartheta \leqslant 25$, l'amortissement est rigoureusement constant.

2°) Pour $\vartheta > 25$, l'amortissement varie, il décroit au début du mouvement, puis garde une valeur constante lors des dernières oscillations .

Ce résultat confirme les remarques du paragraphe II-4-4 concernant l'influence des termes partiels apériodiques dans les équations (II-17).

III-8- EXISTENCE DE DIFFERENTS REGIMES D'ECOULEMENT

L'étude théorique, effectuée en supposant l'écoulement parallèle, a permis de mettre en évidence suivant la valeur du paramètre ϑ différents régimes d'écoulement.

Pour $\vartheta \leqslant \vartheta^*$ ($\vartheta^* = 3{,}436$) l'écoulement est apériodique

Pour $\vartheta > \vartheta^*$ l'écoulement est oscillatoire et il existe deux régimes d'oscillation suivant que $\vartheta \leqslant 25$ ou $\vartheta > 25$.

Les résultats obtenus dans le présent chapitre sur les écoulements oscillatoires peuvent être ainsi brièvement résumés :

1°) Premier régime ($\vartheta^* < \vartheta \leqslant 25$)

α) Profil des vitesses

Le profil des vitesses est du type couche limite de 0 à Ωt_1 ($\Omega t_1 \leqslant \frac{\pi}{2}$) puis du type pleinement développé.

β) Epaisseur de la couche limite

$$\frac{\delta}{R} = 5,8\ \vartheta^{-0,6}\ \sqrt{\Omega t}$$

γ) Coefficient de frottement moyen

$$\overline{C_f}\ \left(\frac{\overline{W_m}}{\omega_p h_o}\ \vartheta\ \frac{h_o}{R}\right) = 8,75$$

δ) Amortissement

Pour une valeur donnée de ϑ, l'amortissement de la colonne fluide est constant au cours des oscillations successives

2°) Deuxième régime ($\vartheta > 25$)

α) Profil des vitesses

Le profil des vitesses est du type couche limite de 0 à Ωt_1 ($\Omega t_1 > \frac{\pi}{2}$) puis du type pleinement développé ($\Omega t_1 = \pi$ pour $\vartheta = 46$ et $\Omega t_1 = 2\pi$ pour $\vartheta = 150$)

* Les valeurs de ϑ telles que $\vartheta^* < \vartheta \leqslant 8,5$ correspondent à un régime transitoire entre les écoulements apériodiques et les écoulements oscillatoires.

β) Epaisseur de la couche limite

β-1) $\Omega t > 1$

$$\frac{\delta}{R} = 5\ \vartheta^{-0,78}\ e^{-0,35\ \sqrt{\Omega t}}$$

β-2) $0,04 \leqslant \Omega t \leqslant 1$

$$\frac{\delta}{R} = 5\ \vartheta^{-1,15}\ e^{-0,7\ \sqrt{\Omega t}}$$

β-3) $0 \leqslant \Omega t \leqslant 0,04$

$$\frac{\delta}{R} = \frac{20}{\vartheta}\ \sqrt{\Omega t}$$

γ) Coefficient de frottement moyen)

$$\overline{C_f}\left(\frac{\overline{V_m}}{\omega_p h_o} \cdot \vartheta\ \frac{h_o}{R}\right) = 2,4\ \vartheta^{0,4}$$

δ) Amortissement

Pour une valeur donnée de ϑ l'amortissement de la colonne fluide varie au cours des oscillations successives.

Remarque : on peut distinguer deux domaines dans le deuxième régime :

a) $25 < \vartheta \leqslant 46$. Les profils appartiennent au sous-groupe pendant la première montée et pendant une fraction de chacune des demi-oscillations successives.

b) $\vartheta > 46$. Les profils appartiennent au sous-groupe 1, pendant la première montée seulement.

C H A P I T R E IV

ETUDE EXPERIMENTALE

Nous avons enregistré, en différents points d'une section droite du tube et pour différentes valeurs des paramètres ν et $\frac{h_o}{R}$, l'évolution au cours du temps de la vitesse instantanée du mouvement oscillatoire libre dans un tube en U d'une colonne fluide libérée brusquement après avoir été écartée de sa position d'équilibre d'une longueur h_o.

Ces enregistrements nous ont donné les profils des vitesses expérimentaux de l'écoulement à différents instants ainsi que l'évolution de l'épaisseur de la couche limite au cours du temps pour les valeurs considérées des paramètres ν et $\frac{h_o}{R}$.

IV-1- DESCRIPTION DES APPAREILS ET CARACTERISTIQUES DES LIQUIDES UTILISES

IV-1-1- Description des appareils

Nous les classons en deux groupes :

1er groupe : le tube en U et les différents dispositifs permettant de créer une dénivellation initiale de la colonne et de libérer ensuite celle-ci.

2ème groupe : Les appareils utilisés pour la mesure des vitesses

IV-1-1-1- Premier groupe

Nous avons utilisé successivement deux tubes en U dont les caractéristiques sont les suivantes :

	Tube 1	Tube 2
Longueur cm	200	200
Rayon cm	1	0,5
Rayon du coude cm	5	5

Le rayon des différentes sections droites de ces tubes en U, construits avec des tubes calibrés, est constant à moins de $\frac{1}{100}$ de mm près.

L'une des extrémités des tubes a la forme d'un entonnoir ce qui permet un remplissage correct. Le robinet de vidange a été réalisé en teflon de manière à assurer une étanchéité parfaite.

Le montage des tubes et la mise en mouvement de la colonne fluide ont été obtenus à l'aide de dispositifs semblables à ceux utilisés par C. Clarion[13]. Nous les rappelons très brièvement :

Le tube en U est fixé sur un socle vertical, une règle graduée placée contre l'une des branches permet de lire la position du ménisque à 1 mm près. Un tube de caoutchouc relie l'une des branches du tube à l'extrémité d'une cloche de verre qui peut se déplacer verticalement dans un récipient cylindrique plein d'eau. Une vanne électromagnétique, placée en dérivation sur cette même branche, permet de créer lorsqu'elle est fermée une dénivellation de la colonne fluide par déplacement de la cloche dans le récipient. L'ouverture de la vanne libère alors la colonne sans vitesse initiale.

IV-1-1-2- Deuxième groupe

La mesure des vitesses instantanées a été réalisée à l'aide d'un anémomètre à température constante type DISA 55 D OO. L'ensemble de mesure comprend : (fig : 33)

a) Un anémomètre 55 D O1 contenant tous les circuits de base et en particulier le pont d'équilibrage.

b) Un bloc auxiliaire 55 D 25 permettant l'adaptation aux autres instruments.

c) Un voltmètre digital continu 55 D 30 utilisé pour l'étalonnage statique de l'anémomètre.

d) Un voltmètre efficace 55 D 35 permettant la mesure de la valeur efficace des composantes de la turbulence et du carré de la valeur moyenne du spectre d'énergie de la turbulence.

e) Une sonde et son système de déplacement (fig. 34)

- Nous avons utilisé des sondes droites à film chaud type 55 F O6, constituées par des éléments cylindriques quartzés de 70 µm de diamètre avec lesquelles on peut mesurer dans les liquides, même conducteurs, des vitesses comprises entre 10^{-2} et 10 m/s.

- La sonde, dont le support coulisse dans un bloc de laiton collé sur le tube en U, est déplacée transversalement dans la section grâce à un système à crémaillère type DISA 55 H 01, la position de la sonde étant déterminée par simple lecture sur un potentiomètre à 10 positions. Nous avons utilisé la plus petite résolution, ce qui nous a permis d'obtenir un déplacement total de la sonde de 10 mm, un millimètre correspondant à un tour complet du potentiomètre.

Afin que les perturbations introduites par le coude soient négligeables, nous avons effectué les mesures dans une section située à 80 cm de celui-ci. Les effets d'extrémité dûs au ménisque ont pu être évités en provoquant des dénivellations initiales telles que le ménisque se trouve constamment au cours du mouvement à 20 cm au moins au-dessus de la sonde.

Le signal transmis par la sonde est reçu sur l'une des traces d'un oscillographe type "Tektronix" à quatre canaux. Une des autres traces a été utilisée pour représenter la réponse d'un capteur piézoélectrique fixé à la paroi du tube et obtenir ainsi la pseudo-période du mouvement. Ces signaux sont photographiés avec un appareil polaroïde.

L'étalonnage des sondes est effectué de la façon suivante :

Nous disposons dans le laboratoire d'un canal hydrodynamique de 10 m de longueur, 1 m de largeur et 0,18 m de profondeur permettant d'effectuer des études de diffusion par des méthodes conductivimétriques. Ce canal est équipé d'un charriot se déplaçant sur des rails parallèlement à son axe. Le déplacement est assuré, par un système de cables et de poulies, grâce à un moteur continu commandé par un équipement "Thysitrol" des "Moteurs Leroy". Ce dispositif permet d'obtenir des vitesses de déplacement comprises entre 0 et 0,60 m/s et constantes à $\frac{1}{50}$ près.

Nous avons disposé parallèlement à l'axe du canal hydrodynamique, un canal de 4 m de longueur, 0,07 m de largeur et 0,04 m de hauteur (fig : 35) qui peut contenir 10 litres du liquide à étudier.

Après avoir préalablement fixé le support au charriot nous avons plongé la sonde dans le liquide, l'élément sensible étant perpendiculaire à la direction du déplacement et pour chaque vitesse q du charriot, nous avons noté sur l'oscillographe la tension V aux bornes du film chaud. Le trajet de la sonde a été choisi afin que les effets dûs à la surface libre du fluide et aux parois du canal soient négligeables ; la courbe d'étalonnage est alors indépendante de la position de la sonde.

Nous avons opéré en déplaçant le charriot alternativement dans les deux sens et vérifié ainsi que la réponse de la sonde est symétrique.

L'étalonnage a été réalisé immédiatement avant ou après les essais avec des températures égales à moins de 0,5 °C près.

Pour chaque essai et chaque étalonnage nous avons utilisé un coefficient de surchauffe de la sonde de 1,1.

IV-1-2- Caractéristiques des liquides utilisés

Nous avons utilisé les liquides suivants :

- Huiles minérales
- Huiles d'arachides
- Solutions eau-glycérine
- Eau distillée
- Alcool méthylique
- Alcool éthylique

Le coefficient de viscosité a été mesuré par au moins deux des trois viscosimètres dont nous disposons au laboratoire.

- Le viscosimètre tournant type "Rhéomat 15" qui permet, en utilisant les systèmes de mesure "O" et "A" de déterminer des viscosités absolues comprises entre $\frac{1}{100}$ P et 7,5 P.

- Le viscosimètre d'Ostwald qui permet, en utilisant différents tubes capillaires, de déterminer les viscosités cinématiques de tous les fluides considérés dans cette étude

$$(9\ 10^{-3} < \nu_{CGS} \leqslant 2\ )$$

- Le viscosimètre à bille qui permet à l'aide de trois billes de diamètres différents de mesurer des viscosités absolues comprises entre $\frac{1}{100}$ P et 200 P.

Entre deux essais le nettoyage du tube a été effectué avec de l'alcool éthylique ou avec une solution sulfo-chromique, le tube était ensuite rincé avec de l'eau distillée.

IV-2- ETUDE EXPERIMENTALE DE LA DISTRIBUTION DES VITESSES

IV-2-1- Principe et méthode expérimentale

L'amplitude du signal fourni par l'anémomètre étant proportionnelle à la tension aux bornes du film chaud les courbes d'étalonnage donnent la vitesse instantanée pour une position de la sonde et un instant donnés.

Pour chacune des positions de la sonde dans le tube nous effectuons une dénivellation de la colonne fluide puis après avoir libéré celle-ci nous enregistrons la variation de tension aux bornes du film chaud au cours du temps. La même opération est répétée pour différentes valeurs de la dénivellation initiale. Les figures (40) à(52) montrent de tels enregistrements. Nous avons

effectué les mesures tous les 1/2 mm près de la paroi et tous les millimètres dans la région centrale du tube. La position de la sonde au contact de la paroi est très malaisée à définir. Afin de déterminer cette "position paroi" nous avons procédé de la façon suivante :

Lorsque la sonde se trouve à l'intérieur du conduit où elle coulisse, ce qui correspond à $\frac{r}{R} > 1$, nous avons remarqué que la sonde donne un signal irrégulier de très faible amplitude dû à la pénétration du fluide dans ce conduit. Nous avons considéré que la sonde est au niveau de la paroi lorsque le signal obtenu est régulier. Cette méthode nous a permis d'obtenir la position "paroi" à moins de 1/2 millimètre près.

Afin d'uniformiser nos essais tous les enregistrements effectués sont tels que la dénivellation initiale h_o est négative, c'est à dire tels que le mouvement étudié commence par une montée de la colonne fluide. Nous avons vérifié que les enregistrements obtenus sont identiques lorsqu'on considère une dénivellation initiale positive.

IV-2-2 Enregistrements de vitesse

Considérons les figures (40) à (52). Sur chaque enregistrement nous avons le signal correspondant à la vitesse instantanée $W(r,t)$ et le signal dû à la réponse du capteur piézoélectrique permettant de déterminer la pseudo-période du mouvement.

La distance entre les maxima et les minima successifs du signal donné par le capteur piézoélectrique permet, connaissant le temps de balayage, de calculer la pseudo-période du mouvement avec une erreur relative inférieure à 2/100.

En ce qui concerne le signal donnant W(r,t) ; connaissant la sensibilité de l'oscillographe (en général 0,2 ou 0,4 V par division), le temps de balayage (en général 0,05 ou 0,1 S par division) il est possible de lire l'amplitude du signal à différents instants qui, la période étant connue, correspondent à différentes phases du mouvement. L'erreur sur la lecture de l'amplitude du signal est inférieure au 1/2 mm mais dans certaines régions (au voisinage des phases $k\pi$ du mouvement) l'évolution de l'amplitude du signal en fonction du temps est très rapide et une erreur même très faible sur la lecture de la phase entraine une erreur importante sur la valeur de la tension.

IV-2-3- Résultats expérimentaux

Nous avons enregistré l'évolution de la vitesse au cours du temps, pour quatorze valeurs du paramètre $\mathcal{V}$ comprises entre 2,04 et 260 et choisies parmi celles pour lesquelles ont été effectués les calculs de l'étude théorique, pour différentes valeurs de $\frac{h_o}{R}$ comprises entre 1 et 50 et pour différentes valeurs de $\frac{r}{R}$. Les valeurs des caractéristiques géométriques et physiques de la colonne fluide ainsi que les valeurs de $\mathcal{V}$, $\frac{h_o}{R}$ et $\frac{r}{R}$ correspondant à chaque essai sont groupées dans le tableau IV.1.

Tableau IV.1

Essai	Liquide utilisé	Température d'essai	ν_{CGS}	ω_p	ϑ	h_o cm $\frac{r}{R} \neq 0$	h_o cm $\frac{r}{R} = 0$
A	Huile minérale	16°	1,255	2,6	2,04	4 10 40	2, 4, 6 8,10,15 20,25,30 35,40,45
B	Huile	19°5	0,304	2,58	8,5	5	1, 2, 3, 4 5, 7, 9,12 15,18,21 25,30
C	Solution eau-glycérine	17°5	0,167	2,56	15,3	4 50	4,10,25 50
D	"	19°	0,0966	2,75	28,5	4 8 15 25	4, 8,15 25 50
E	"	15°5	0,0715	2,56	35,8	4 30 50	2, 4, 8,12 20,25,30 40,50
F	"	19°	0,061	2,56	42	4 30 50	2, 4, 8,12 15,20,25,30 35,40,45,50
G	"	19°	0,053	2,48	46,9	4 12 25	2, 4, 6, 8 12,15,18 20,25
H	"	20°	0,040	2,48	62,2	4 8 10 25	4, 8,10 12,15,20 25

Tableau IV.1 (Suite)

Essai	Liquide utilisé	Température d'essai	ν_{CGS}	ω_p	ϑ	h_o cm $\frac{r}{R} \neq 0$	h_o cm $\frac{r}{R} = 0$
I	Solution eau-glycérine	19°5	0,0181	2,48	138	4 10 15 25	4, 8,10 12,15,20 25
J	"	18°	0,0140	2,56	177	4 8 12 25	2, 4, 8 12,15 20,25
K	"	15°	0,0124	2,40	193,3		2, 4, 6, 8 10,12,15 20,25,30 35,40,45 50
L	"	15°	0,0124	2,56	206	4 10 50	2, 4, 6, 8,10 12,15,20,25 30,35,40 45,50
M	"	15°	0,0124	2,75	221		2, 4, 6, 8 10,12,15,20 25,30,35 40,45,50
N	Alcool méthylique	17°	0,00956	2,48	260	4 8 10 25	2, 4, 8 10,15,20 25,30

IV - 2-3-1- Courbes d'étalonnage

Les figures (36) et (37) montrent à titre d'exemple les courbes d'étalonnage obtenues pour deux essais.

Si nous représentons (fig : 38 et 39) en coordonnées logarithmiques les courbes d'étalonnage obtenues pour les essais correspondant à ν = 15,3 et ν = 28,5 nous constatons que pour un essai donné la courbe représentative est constituée par plusieurs portions de droite si $q < 0,3$ m/s et par une droite unique si $q > 0,3$ m/s.

L'unicité, pour $q > 0,3$ m/s, de la courbe d'étalonnage linéarisée nous a permis de calculer par extrapolation les vitesses d'écoulement supérieures à 0,6 m/s (rappelons que l'étalonnage est limité à des vitesses comprises entre 0 et 0,6 m/s) .

La non unicité pour $q < 0,3$ m/s de la courbe d'étalonnage linéarisée ne nous a pas permis d'utiliser un linéarisateur.

IV-2-3-2- Analyse des enregistrements

L'étude du signal auxiliaire dû à la réponse du capteur piézoélectrique montre que pour une valeur donnée de ν, la pseudo-période est constante au cours des oscillations successives de la colonne fluide et indépendante de $\frac{h_o}{R}$.

En ce qui concerne le signal représentant, en un point de la section droite du tube, l'évolution de la vitesse instantanée au cours du temps, nous allons analyser successivement une série d'enregistrements caractéristiques représentés dans les figures (40) à (52) ; cette étude nous permettra de dégager certaines lois.

a) figure (40) $\mathcal{V} = 15,3$ $\frac{h_o}{R} = 50$ $\frac{r}{R} = 0,95$

$\frac{r}{R} = 0,5$

$\frac{r}{R} = 0,1$

Le signal ne présente aucune irrégularité et s'amortit de façon régulière au cours du temps

b) figure (41) $\mathcal{V} = 15,3$ $\frac{h_o}{R} = 4$ $\frac{r}{R} = 0$

$\frac{h_o}{R} = 10$

$\frac{h_o}{R} = 25$

$\frac{h_o}{R} = 50$

Le signal ne présente aucune irrégularité, son amplitude à un instant donné est une fonction croissante de $\frac{h_o}{R}$.

c) figure (42) $\mathcal{V} = 28,5$ $\frac{h_o}{R} = 50$ $\frac{r}{R} = 0$

$\mathcal{V} = 31,4$

Si pour $\mathcal{V} = 28,5$ le signal n'est jamais perturbé, par contre pour $\mathcal{V} = 31,4$, il présente une irrégularité lors de la descente au voisinage de $\Omega t = \frac{3}{2}\pi$ mais n'est toujours pas perturbé lors de la première montée.

d) figure (43) $\mathcal{V} = 35,8$ $\frac{h_o}{R} = 20$ $\frac{r}{R} = 0$

$\frac{h_o}{R} = 30$

$\frac{h_o}{R} = 40$

$\frac{h_o}{R} = 50$

Pour $\frac{h_o}{R} = 20$ le signal n'est jamais perturbé ; pour $\frac{h_o}{R} = 30$ une irrégularité est visible au voisinage de $\Omega t = \frac{3\pi}{2}$. Lorsque $\frac{h_o}{R}$ croit depuis 30 jusqu'à 50, le signal devient de plus en plus irrégulier, le nombre et l'amplitude des irrégularités augmentent, de plus, ces irrégularités sont visibles lors de la phase accélérée de la première descente ($\pi \leqslant \Omega t < \frac{3\pi}{2}$) à partir d'une valeur de Ωt de plus en plus faible.

Cependant le signal n'est jamais perturbé lors de la phase retardée de la première descente ($\frac{3\pi}{2} < \Omega t < 2\pi$), de même que lors de la deuxième montée, par contre il peut être perturbé lors de la phase accélérée de la deuxième descente ($\frac{h_o}{R} = 50$).

e) Figure (44) $\mathcal{V} = 35,8$ $\frac{h_o}{R} = 50$ $\frac{r}{R} = 0,95$

$\frac{r}{R} = 0,5$

$\frac{r}{R} = 0$

Lors de la descente, l'écoulement est plus perturbé au voisinage de la paroi qu'au centre du tube.

f) figure (45) $\mathcal{V} = 62,2$ $\frac{h_o}{R} = 15$ $\frac{r}{R} = 0$

$\frac{h_o}{R} = 20$

$\frac{h_o}{R} = 25$

Pour $\frac{h_o}{R} = 15$ on a une seule irrégularité au cours de la première descente, pour $\frac{h_o}{R} = 20$ plusieurs irrégularités au cours de cette descente, pour $\frac{h_o}{R} = 25$ la deuxième montée et la deuxième descente présentent elles aussi des irrégularités.

Lorsque $\frac{h_o}{R}$ croit les irrégularités sont visibles de plus en plus tôt lors de la phase accélérée de la première descente; ces irrégularités peuvent être visibles aussi lors des montées à partir de la deuxième. On rappelle que pour ϑ = 35,8 (fig : 43) les phases retardées des descentes, ainsi que les montées successives ne sont jamais perturbées.

g) figure (46) ϑ = 138 $\frac{h_o}{R}$ = 4 $\frac{r}{R}$ = 0

$\frac{h_o}{R}$ = 10

$\frac{h_o}{R}$ = 15

$\frac{h_o}{R}$ = 25

figure (47) ϑ = 138 $\frac{h_o}{R}$ = 15 $\frac{r}{R}$ = 0

$\frac{h_o}{R}$ = 20

$\frac{h_o}{R}$ = 25

La figure (46) correspond à des enregistrements d'une durée de 5 secondes. La figure (47) à des enregistrements d'une durée de 10 secondes.

On observe, que toutes choses égales d'ailleurs, la fréquence et l'amplitude des irrégularités ainsi que le nombre d'oscillations affectées par ces irrégularités croissent avec $\frac{h_o}{R}$:

On observe ainsi une irrégularité,

- lors de la deuxième montée et de la deuxième descente ($\frac{h_o}{R}$ = 15)

- lors de la troisième montée et de la troisième descente ($\frac{h_o}{R} = 20$)

- lors de la quatrième montée et de la quatrième descente ($\frac{h_o}{R} = 25$)

Pour $\frac{h_o}{R} = 25$ on remarque que la première descente est totalement perturbée et que lors de la deuxième oscillation les amplitudes de la montée et de la descente sont à peu près égales, ce que nous appelons un "couplage montée-descente".

h) figure (48) $\mathcal{V} = 138$ $\frac{h_o}{R} = 4$ $\frac{r}{R} = 0,95$

$\frac{h_o}{R} = 10$

$\frac{h_o}{R} = 15$

$\frac{h_o}{R} = 25$

En comparant cette figure, avec la figure (44), on constate que toutes choses égales d'ailleurs, les irrégularités sont plus nombreuses, mais d'amplitude plus faible, au centre du tube que près de la paroi

i) figure (49) $\mathcal{V} = 177$ $\frac{h_o}{R} = 8$ $\frac{r}{R} = 0$

$\frac{h_o}{R} = 15$

$\frac{h_o}{R} = 25$

Le couplage montée-descente déjà noté dans les figures (46) et (47) affecte, pour $\frac{h_o}{R} = 25$, les deuxième, troisième et quatrième oscillations, par contre il n'est pas observé pour $\frac{h_o}{R} = 15$.

Pour $\frac{h_o}{R}$ = 15 l'écoulement n'est jamais totalement perturbé, il l'est par contre pour $\frac{h_o}{R}$ = 25 depuis le début de la deuxième descente jusqu'à la fin de la troisième oscillation.

j) figure (50) ν = 260 $\frac{h_o}{R}$ = 25 $\frac{r}{R}$ = 0,95

$\frac{r}{R}$ = 0,85

$\frac{r}{R}$ = 0,30

la fréquence des irrégularités augmente, mais leur amplitude diminue lorsqu'on se déplace de la paroi vers le centre du tube.

k) figure (51) ν = 193,5 $\frac{h_o}{R}$ = 15 $\frac{r}{R}$ = 0

$\frac{h_o}{R}$ = 20

$\frac{h_o}{R}$ = 25

Ces enregistrements d'une durée de 20 s montrent que, en un point et une valeur de ν donnés, le nombre de couplages montée-descente est de plus en plus grand lorsque $\frac{h_o}{R}$ croit.

1) figure (52) ν =2,04 $\frac{h_o}{R}$ = 4 $\frac{r}{R}$ = 0

$\frac{h_o}{R}$ = 10

$\frac{h_o}{R}$ = 50

Cette figure concerne un régime apériodique.

La vitesse nulle, à l'instant initial, croit très rapidement pour décroitre ensuite exponentiellement au cours du temps. La durée de l'écoulement est une fonction croissante de la dénivellation initiale h_o. La valeur du paramètre ν limite des écoulements apériodiques a été trouvée égale à 4.

L'analyse des enregistrements de vitesse permet de dégager les lois suivantes :

A) Amplitude de la vitesse instantanée

Pour une valeur de ν , l'amplitude de la vitesse instantanée, est en un point et à un instant donnés une fonction croissante de $\frac{h_o}{R}$.

B) Existence de différents types d'écoulement

Il existe plusieurs types d'écoulement suivant la valeur du paramètre ν .

1°) des écoulements apériodiques définis par $\nu \leqslant 4$

2°) des écoulements oscillatoires définis par $\nu > 4$

On distingue, suivant la valeur de ν , trois régimes possibles :

α) Un premier régime défini par $4 < \nu \leqslant 28,5$ pour lequel l'écoulement n'est jamais perturbé. L'écoulement est donc laminaire quelle que soit la valeur de $\frac{h_o}{R}$

β) Un deuxième régime défini par $\nu > 46,9$ pour lequel, suivant la valeur de $\frac{h_o}{R}$, l'écoulement est fortement perturbé pendant au moins toute la première descente de la colonne fluide et présente donc les caractéristiques d'un écoulement turbulent.

γ) Un régime intermédiaire défini par $28,5 < \nu \leqslant 46,9$ pour lequel l'écoulement ne peut jamais être turbulent pendant une demi-oscillation complète.

C) Etude des régimes d'oscillation

Lorsque $\mathcal{V} > 28,5$, il existe pour chaque valeur de $\mathcal{V}$ une valeur de $\frac{h_o}{R}$, $(\frac{h_o}{R})_{c_1}$ au-dessous de laquelle l'écoulement est toujours laminaire. Pour les valeurs de $\frac{h_o}{R}$ légèrement supérieures à $(\frac{h_o}{R})_{c_1}$ une perturbation est visible au voisinage de l'instant $\Omega t = \frac{3}{2}\pi$.

a) Pour $\mathcal{V} > 46,9$(deuxième régime), lorsque $\frac{h_o}{R}$ croit à partir de $(\frac{h_o}{R})_{c_1}$, on observe des perturbations dans l'écoulement de plus en plus tôt avant $\Omega t = \frac{3\pi}{2}$ jusqu'à $\Omega t = \pi$ et de plus en plus tard après $\Omega t = \frac{3\pi}{2}$ et ces perturbations augmentent en amplitude et en fréquence.

Pour la valeur de $\frac{h_o}{R}$, $(\frac{h_o}{R})_{c_2}$, l'écoulement est fortement perturbé et présente donc les caractéristiques d'un écoulement turbulent pendant toute la durée de la première descente . Lorsque $\frac{h_o}{R}$ croit au-delà de $(\frac{h_o}{R})_{c_2}$, l'écoulement reste toujours laminaire jusqu'à la fin de la première montée mais le nombre d'oscillations pendant lesquelles l'écoulement est entièrement turbulent augmente.

Lorsque la montée d'une oscillation est entièrement turbulente la descente l'est aussi, ce qui donne un couplage montée-descente. Ces couplages débutent à la deuxième oscillation et pour un $\mathcal{V}$ donné affectent d'autant plus d'oscillations que $\frac{h_o}{R}$ est plus grand.

b) Pour $28,5 < \nu \leqslant 46,9$ (régime intermédiaire) lorsque $\frac{h_o}{R}$ croit, à partir de $(\frac{h_o}{R})_{c_1}$, on observe des perturbations dans l'écoulement de plus en plus tôt avant $\Omega t = \frac{3\pi}{2}$ jusqu'à $\Omega t = \pi$ (phase accélérée de la première descente) mais jamais de perturbation dans la phase retardée de la première descente ($\frac{3\pi}{2} < \Omega t < 2\pi$). De plus on remarque que les montées successives sont toutes laminaires mais que l'on peut observer des perturbations au cours de la phase accélérée des descentes successives.

D) Valeurs critiques de $(\frac{h_o}{R})$

Les valeurs des rapports $(\frac{h_o}{R})_{c_1}$ et $(\frac{h_o}{R})_{c_2}$ précédemment définies, relevées sur les enregistrements lors de la première descente au centre du tube, sont données avec la valeur correspondante de ν dans le tableau suivant :

Tableau IV.2

ν	$(\frac{h_o}{R})_{c_1}$	$(\frac{h_o}{R})_{c_2}$
35,8	21	
42	18	
46,9	17	x
60,7	15	x
62,2	15	40
138	9	25
177	8	20
193,5	7	19
206	7	18
221	7	18
260	6	16

x : régime turbulent non atteint dans nos essais

En représentant graphiquement (fig.53) les valeurs de $(\frac{h_o}{R})_{c_1}$ et $(\frac{h_o}{R})_{c_2}$ en fonction de $\mathcal{V}$, en coordonnées logarithmiques, on obtient deux droites.

$(\frac{h_o}{R})_{c_1}$ et $(\frac{h_o}{R})_{c_2}$ sont donc fonction de $\mathcal{V}$ et leur expression est

$$(\frac{h_o}{R})_{c_1} = 175\ \mathcal{V}^{-0,6}$$
$$(\frac{h_o}{R})_{c_2} = 450\ \mathcal{V}^{-0,6} \qquad (IV.1)$$

IV-2-3-3 Vitesses instantanées

Dans les figures (4) et (7) à (14) qui donnent les profils des vitesses théoriques, pour différentes valeurs de $\omega_p t$ comprises entre 0 et 30 ou aux instants $\Omega t = k\frac{\pi}{4}$ dans l'intervalle $0 \leqslant \Omega t \leqslant 3\pi$, respectivement pour les valeurs suivantes de $\mathcal{V}$: 2,04 (régime apériodique) et 8,5 ; 15,3 ; 28,5 ; 46,9 ; 62,2 ; 138 ; 177 ; 260 (régimes oscillatoires), nous avons représenté, pour les valeurs correspondantes de $\omega_p t$ ou Ωt et de $\mathcal{V}$ et pour chaque valeur de $\mathcal{V}$ pour certaines valeurs de $\frac{h_o}{R}$ considérées dans l'étude expérimentale, les profils des vitesses expérimentaux, $(\frac{W}{\omega_p h_o})_{exp}$, obtenus à partir des enregistrements de la vitesse en fonction du temps, enregistrements que nous venons d'analyser. Les profils des vitesses expérimentaux, à l'instant $\Omega t = \frac{\pi}{2}$, correspondant aux valeurs de $\mathcal{V}$ et de $\frac{h_o}{R}$ des figures (7) à (14) sont regroupés dans la figure (54).

IV-2-3-3-1- Régimes apériodiques

Le rapport $(\frac{W}{h_o \omega_p})_{exp}$ est fonction de $\frac{h_o}{R}$, par suite les résultats expérimentaux confirment d'autant mieux la théorie que $\frac{h_o}{R}$ est plus petit. D'autre part $(\frac{W}{h_o \omega_p})_{exp}$ a une valeur maximale pour $\omega_p t = 1$ ce qui est en accord avec la théorie.

IV-2-3-3-2- Régimes oscillatoires

Les profils des vitesses théoriques sont indépendants de $\frac{h_o}{R}$, les profils des vitesses expérimentaux peuvent en dépendre.

IV-2-3-3-2-1- Variation de la vitesse instantanée en fonction de $\frac{h_o}{R}$

Dans les figures (55) (56) (57), nous avons représenté, pour une valeur donnée de ω_p, la variation de la vitesse expérimentale au centre du tube $(W_{exp})_{r=0}$, en fonction de h_o pour les valeurs 15,3 ; 62,2 et 138 de $\mathcal{V}$ et pour chaque valeur de $\mathcal{V}$ aux instants $\Omega t = (2k+1)\frac{\pi}{2}$. Si pour $\mathcal{V} = 15,3$ cette variation est linéaire, par contre pour $\mathcal{V} = 62,2$ et $\mathcal{V} = 138$ la courbe représentative n'est une droite que pour approximativement $\frac{h_o}{R} < 16$ et $\frac{h_o}{R} < 12$ respectivement. Au-delà de ces valeurs limites, les points expérimentaux s'écartent d'autant plus de la droite correspondante que $\frac{h_o}{R}$ est plus grand. Pour une valeur de $\mathcal{V}$ et de $\frac{h_o}{R}$ donnée la courbe représentative tend à nouveau vers une droite lorsque Ωt croit, lors des dernières oscillations de la colonne fluide la variation de la vitesse en fonction de h_o est linéaire.

Nous avons vu dans le tableau IV.2 que

pour $\mathcal{V} = 62,2$ $\quad (\frac{h_o}{R})_{c_1} = 15$ $\quad (\frac{h_o}{R})_{c_2} = 40$

$\mathcal{V} = 138$ $\quad (\frac{h_o}{R})_{c_1} = 9$ $\quad (\frac{h_o}{R})_{c_2} = 25$

Pour chacun des deux cas étudiés, la valeur de $\frac{h_o}{R}$ pour laquelle cesse la linéarité est donc voisine de celle de $(\frac{h_o}{R})_{c_1}$.

Ces résultats concernant la variation de la vitesse instantanée en fonction de $\frac{h_o}{R}$ sont confirmés par l'analyse des figures (54) et (7) à (14).

On constate en effet sur ces figures que pour une valeur donnée de $\mathcal{V}$ et à un instant déterminé :

Pour $\mathcal{V} \leqslant 28,5$, le profil expérimental est unique quel que soit $\frac{h_o}{R}$.

Pour $\mathcal{V} > 28,5$, les profils expérimentaux correspondant à une valeur de $\frac{h_o}{R}$ inférieure à $(\frac{h_o}{R})_{c_1}$ et à une valeur de $\frac{h_o}{R}$ supérieure à $(\frac{h_o}{R})_{c_1}$ sont distincts mais qualitativement leur forme est identique.

On doit remarquer pourtant que dans le domaine $28,5 < \mathcal{V} < 46,9$ ces deux profils peuvent être considérés comme confondus.

Nous pouvons donc énoncer :

Pour une valeur de $\mathcal{V}$ et un instant déterminés :

a) Lorsque $\mathcal{V} \leqslant \mathcal{V}_c$, quel que soit $\frac{h_o}{R}$

ou $\mathcal{V} > \mathcal{V}_c$ et $\frac{h_o}{R} < (\frac{h_o}{R})_{c_1}$,

le profil expérimental est unique, quel que soit $\frac{h_o}{R}$

b) Lorsque $\mathcal{V} > \mathcal{V}_c$ et $(\frac{h_o}{R}) \geqslant (\frac{h_o}{R})_{c_1}$,

à chaque valeur de $\frac{h_o}{R}$ correspond un profil expérimental.

La valeur critique $\mathcal{V}_c$ est :

$$\mathcal{V}_c = 28,5$$

IV-2-3-3-2-2- Comparaison des profils de vitesse théoriques et expérimentaux

La figure (54) correspondant à $\Omega t = \frac{\pi}{2}$ montre que

a) pour $\mathcal{V} \leqslant 28,5$,le profil de vitesse expérimental est du type pleinement développé avec croissance continue de vitesse.

b) pour $\mathcal{V} > 28,5$,les profils des vitesses expérimentaux correspondant aux différentes valeurs de $\frac{h_o}{R}$ sont du type couche limite avec croissance continue de la vitesse dans la couche limite. Dans ce cas la largeur du noyau central est une fonction croissante de $\mathcal{V}$ (c'est à dire l'épaisseur de la couche limite est une fonction décroissante de $\mathcal{V}$).

Ce résultat est en excellent accord avec l'étude théorique (fig. 16), on remarquera simplement que la valeur de $\mathcal{V}$ caractérisant la fin du régime pleinement développé à l'instant $\Omega t = \frac{\pi}{2}$ est 25 au lieu de 28,5.

Pour comparer l'évolution au cours du temps des profils de vitesse théoriques et expérimentaux, nous allons considérer successivement les domaines de variation de $\mathcal{V}$ correspondant aux trois régimes précedemment définis. Pour une valeur de $\mathcal{V}$ et un instant donnés :

a) $\mathcal{V} \leqslant 28,5$. L'accord entre le profil expérimental unique et le profil théorique est excellent tout au long de l'écoulement à l'exception du domaine $0 < \Omega t < \Omega t_\ell$ (avec $\Omega t_\ell \leqslant \frac{\pi}{4}$) où l'accord n'est que qualitatif.

b) $28,5 < \mathcal{V} \leqslant 46,9$. L'accord entre les profils expérimentaux presque confondus et le profil théorique est bon à l'exception du début du mouvement où l'accord n'est que qualitatif ($\Omega t_\ell = \frac{\pi}{2}$ pour $\mathcal{V} = 46,9$).

c) $\mathcal{V} > 46,9$. Au cours de la première montée les profils expérimentaux et le profil théorique ont des formes identiques, quantitativement la vitesse expérimentale est d'autant plus faible que $\frac{h_o}{R}$ est plus grand et toujours plus faible que la vitesse théorique principalement au début du mouvement.

Au cours de la première descente et de la deuxième montée :

α) si $(\frac{h_o}{R}) < (\frac{h_o}{R})_{c_1}$ le profil expérimental et le profil théorique ont la même forme. En particulier pour $\mathcal{V} = 177$ et $\frac{h_o}{R} = 4$ on retrouve pour $\Omega t = \frac{3\pi}{2}$ un profil de type couche limite 2 et pour $\Omega t = \frac{5\pi}{2}$ un profil de type pleinement développé 3.

β) si $\frac{h_o}{R} > (\frac{h_o}{R})_{c_1}$ les profils expérimentaux n'ont plus, pendant une durée plus ou moins longue encadrant $\frac{3\pi}{2}$ et $\frac{5\pi}{2}$ la même forme que le profil théorique.

Par exemple pour $\mathcal{V} = 138$ et $\frac{h_o}{R} = 25$ $\left[(\frac{h_o}{R})_{c_2} = 25\right]$ le profil expérimental aux instants $\Omega t = \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}, \frac{5\pi}{2}$ correspond à une augmentation continue et brutale du module de la vitesse dans une couche limite très mince, ce module restant ensuite constant dans le noyau central. Nous avons noté sur l'enregistrement de vitesse correspondant (fig.48) le caractère fortement perturbé de l'écoulement. La forme caractéristique du profil des vitesses obtenu confirme parfaitement l'hypothèse de la nature turbulente de l'écoulement.

Par suite lorsque $\mathcal{V} > 46,9$, les profils expérimentaux et le profil théorique ont des formes identiques lors de la première montée. Par contre, à partir du début de la première descente, les profils expérimentaux n'ont la même forme que le profil théorique correspondant que si l'écoulement n'est pas turbulent.

Remarque. L'écoulement n'est, nous l'avons vu, jamais turbulent lors de la première montée, quelle que soit la valeur de $\mathcal{V}$, et lors de la phase décélérée de la première descente pour $28,5 < \mathcal{V} < 46,9$ Or nous avons vu (III.2.2.2.) que les profils des vitesses théoriques correspondant appartiennent au sous-groupe 1 (module de la vitesse croissant de façon continue de la paroi jusqu'à la frontière de la couche limite ou de l'axe). Il semble donc que les profils théoriques du sous-groupe 1 soient stables.

IV-3- COUCHE LIMITE

L'étude des profils de vitesse expérimentaux nous a permis de déterminer la variation de l'épaisseur relative $\frac{\delta}{R}$ de

la couche limite* en fonction du temps pour les différentes valeurs des paramètres ν et $\frac{h_o}{R}$ considérés. Nous avons représenté cette évolution de $(\frac{\delta}{R})_{exp}$ au cours de la première période du mouvement, pour $\nu = 46,9$, $\frac{h_o}{R} = 4$, $\frac{h_o}{R} = 25$, pour $\nu = 177$, $\frac{h_o}{R} = 4$, $\frac{h_o}{R} = 25$ et pour $\nu = 260$ $\frac{h_o}{R} = 4$, $\frac{h_o}{R} = 25$, dans les figures (58) et (59) où sont aussi représentées les valeurs correspondantes de $\frac{\delta}{R}$, calculées à partir de l'étude théorique.

On constate que pour $\nu = 46,9$, l'écoulement est pleinement développé à partir de $\Omega t \simeq \pi$ et que l'accord entre les valeurs expérimentales et les valeurs théoriques est excellent.

Pour $\nu = 177$, l'accord entre les valeurs expérimentales et les valeurs théoriques est très bon pour $\frac{h_o}{R} = 4$, par contre pour $\frac{h_o}{R} = 25$ le recoupement n'est réalisé que pour $0 < \Omega t \leqslant \pi$

A partir de $\Omega t = \pi$, les points expérimentaux s'écartent de la courbe théorique correspondante, l'écart maximum étant atteint pour $\Omega t = \frac{3\pi}{2}$. Au delà de $\Omega t = \frac{3\pi}{2}$ les points expérimentaux se rapprochent de nouveau de la courbe théorique. Ce phénomène s'explique par le fait que pour $\frac{h_o}{R} = 4$ l'écoulement est laminaire et que pour $\frac{h_o}{R} = 25$ l'écoulement est très perturbé au voisinage de $\Omega t = \frac{3\pi}{2}$, le caractère turbulent de l'écoulement s'amplifiant durant la phase accélérée du mouvement $\pi < \Omega t < \frac{3\pi}{2}$ et s'atténuant lors de la phase décélérée $\frac{3\pi}{2} < \Omega t < 2\pi$.

En ce qui concerne l'essai $\nu = 260$, $\frac{h_o}{R} = 25$ pour lequel l'écoulement est turbulent pour $\pi < \Omega t < 2\pi$, l'accord entre les résultats théoriques et expérimentaux n'est jamais réalisé dans ce domaine, l'écart maximal étant atteint dès $\Omega t = \frac{6\pi}{5}$.

---

* δ est défini comme la distance de la paroi au-delà de laquelle la vitesse diffère de moins de 1 % de la vitesse au centre du tube.

IV-4- COMPARAISON DES RESULTATS THEORIQUES ET EXPERIMENTAUX

L'étude expérimentale du mouvement oscillatoire libre montre l'existence possible de plusieurs régimes d'écoulement, l'occurence de l'un ou l'autre régime étant liée à la valeur numérique du paramètre $\mathcal{V}$.

Pour $\mathcal{V} < 4$ l'écoulement est apériodique
Pour $\mathcal{V} > 4$ l'écoulement est oscillatoire, et on distingue :

le premier régime, défini par $4 < \mathcal{V} \leqslant 28{,}5$ pour lequel l'écoulement est laminaire quelle que soit la valeur de $\frac{h_o}{R}$;

le deuxième régime, défini par $\mathcal{V} > 46$, pour lequel l'écoulement, suivant la valeur de $\frac{h_o}{R}$, peut être turbulent dans un domaine plus ou moins important de l'oscillation ;

le régime intermédiaire, défini par $28{,}5 < \mathcal{V} \leqslant 46$, pour lequel l'écoulement, suivant la valeur de $\frac{h_o}{R}$, peut être turbulent mais ne peut l'être, aussi grande soit la valeur de $\frac{h_o}{R}$, pendant une demi-oscillation complète.

L'étude théorique effectuée en supposant l'écoulement laminaire et en ne tenant compte que de la composante axiale de la vitesse mais en satisfaisant aux conditions initiales montre elle aussi l'existence, suivant la valeur de $\mathcal{V}$, de plusieurs régimes d'écoulement :

Pour $\mathcal{V} \leqslant 3{,}436$ l'écoulement est apériodique
Pour $\mathcal{V} > 3{,}436$ l'écoulement est oscillatoire

La forme des profils des vitesses instantanées, les lois de variation de l'épaisseur de la couche limite en fonction du temps, et les expressions du coefficient de frottement moyen, permettent de distinguer :

le premier régime défini par $3{,}436 < \mathcal{V} \leqslant 25$
le deuxième régime défini par $\mathcal{V} > 46$
le régime intermédiaire défini par $25 < \mathcal{V} \leqslant 46$

Les résultats expérimentaux sont en excellent accord avec les résultats théoriques dans le régime apériodique et en ce qui concerne les régimes oscillatoires dans le premier régime et, lorsque la valeur de $\frac{h_o}{R}$ est telle que l'écoulement considéré est laminaire, dans le deuxième régime et le régime intermédiaire. Les hypothèses de l'étude théorique (composante radiale de la vitesse et influence des coudes négligées) paraissent ainsi justifiées. Par contre lorsque dans le deuxième régime et le régime intermédiaire l'écoulement est turbulent les résultats expérimentaux sont en désaccord avec la théorie dans le domaine correspondant.

La détermination des valeurs des paramètres pour lesquelles l'écoulement cesse d'être laminaire dans un domaine plus ou moins étendu des oscillations successives fait l'objet du chapitre suivant.

C H A P I T R E V

ETUDE DE LA STABILITE DE L'ECOULEMENT

V.1. INTRODUCTION

Différentes méthodes et techniques de calcul ont été mises au point pour résoudre le problème de la stabilité des écoulements permanents. La méthode de calcul consiste à introduire à un instant donné, dans le champ de l'écoulement laminaire permanent des perturbations de longueurs d'onde différentes et à étudier leur évolution au cours du temps. L'écoulement est considéré comme stable lorsque les perturbations s'amortissent. Pour les écoulements non permanents la précédente définition de la stabilité ne peut plus s'appliquer car le profil des vitesses de l'écoulement de base évolue à chaque instant.

Dans la méthode "quasi-stationnaire" on suppose à chaque instant l'écoulement permanent et on analyse la stabilité du profil des vitesses instantanées. Deux critères de stabilité sont utilisés : le critère du taux d'accroissement nul (premier critère) et le critère de stabilité momentanée (deuxième critère).

Premier critère : la distribution des vitesses instantanées est "gelée" et l'on détermine si une perturbation superposée à l'écoulement de base croit ou décroit lorsque le temps croit. L'écoulement est supposé stable si les perturbations décroissent. Ce critère n'est applicable que si les vitesses de perturbation croissent plus vite que la vitesse de l'écoulement de base.

Deuxième critère : on examine à chaque instant l'accroissement des perturbations par rapport à l'écoulement de base. Ainsi un écoulement accéléré est stable si les perturbations ne croissent pas plus vite que l'écoulement de base et un écoulement décéléré est stable si les perturbations décroissent plus vite que l'écoulement de base. L'application de ce critère exige le calcul du rapport du taux d'accroissement au cours du temps de l'intégrale de l'énergie cinétique des perturbations à l'intégrale de l'énergie cinétique de l'écoulement de base, les intégrales étant étendues à tout le champ de l'écoulement

L'application de la méthode "quasi-stationnaire" n'est justifiée que lorsque le comportement de l'écoulement aux instants antérieurs et postérieurs à l'instant considéré est connu. L'intérêt de cette méthode, est que les équations linéaires des perturbations se ramènent à un problème aux valeurs propres dont les solutions donnent le temps critique et les longueurs d'onde critiques sans introduire des conditions initiales arbitraires.

Une autre méthode pour étudier la stabilité d'écoulements non permanents consiste à résoudre les équations linéarisées comme un problème aux valeurs initiales. On superpose à l'instant initial à l'écoulement de base des petites perturbations de longueur d'onde donnée et on étudie l'évolution au cours du temps de leur énergie cinétique moyenne. La définition de la stabilité repose sur la décroissance de cette énergie cinétique.

Les études de la stabilité des écoulements non permanents qui ont été effectuées concernent particulièrement l'écoulement de Couette (écoulement plan et écoulement entre cylindres coaxiaux) et l'écoulement de Poiseuille (écoulement plan).

Nous allons analyser quelques unes des principales études réalisées.

V.1.1. Travaux de C.E. Grosh et H. Salven[49] (1968)

Ces auteurs ont étudié la stabilité de l'écoulement plan de Poiseuille lorsque l'écoulement est soit permanent soit soumis à un gradient de pression périodique. La fonction de courant des perturbations est développée en une série de fonctions satisfaisant les conditions aux limites. Les développements, tronqués après N termes, conduisent à un système linéaire de N équations différentielles résolues par la méthode classique de calcul des valeurs propres et des fonctions propres. Les auteurs ont montré que le caractère oscillatoire ne tend à stabiliser l'écoulement que lorsque l'amplitude de l'oscillation est faible. Pour une amplitude et une fréquence d'oscillation fixées il est possible de tracer la courbe de stabilité neutre ; le nombre de Reynolds critique est alors plus grand et la bande de nombres d'onde instables plus étroite que pour l'écoulement permanent.

V.1.2. Travaux de P.W. Conrad et W.O. Criminale[50] et [51] (1965)

Ces auteurs en adoptant la définition "quasi-stationnaire" ont élaboré par une méthode non linéaire et à l'aide du calcul des variations une théorie de la stabilité des écoulements non permanents. Cette théorie qui ramène l'étude de la stabilité à un problème de recherche de valeurs propres est appliquée à l'écoulement plan de Couette (accéléré, décéléré, oscillatoire), à l'écoulement plan entretenu de Poiseuille[50] et à l'écoulement entre deux cylindres coaxiaux lorsque le cylindre intérieur est animé d'un mouvement oscillatoire[51]. De plus en utilisant l'analyse linéaire Conrad et Criminale ont généralisé aux écoulements non permanents le théorème de Squire, le théorème de Rayleigh[52] et les conditions suffisantes de stabilité de Synge.

V.1.3. Travaux de S.F. Shen[53] (1961)

Dans son étude S F. Shen a introduit le concept de "stabilité momentanée" et a montré que lorsque la vitesse de l'écoulement de base est de la forme $U(y,t) = T(t) \times \phi(y)$, l'étude de la stabilité se conduit comme dans le cas d'un écoulement permanent. En particulier, le système des équations des perturbations linéaires se réduit à un problème de recherche de valeurs propres et sa résolution donne les longueurs d'onde critiques et le temps critique.

V.1.4. Travaux de R.P. Kirchner et C.F. Chen[54] et [55] (1970 et 1971)

Ces auteurs ont effectué l'étude, théorique et expérimentale, de la stabilité de l'écoulement entre deux cylindres lorsque le cylindre intérieur est mis brusquement en mouvement. Des visualisations [54] effectuées avec des liquides colorés ont mis en évidence des instabilités dépendant du temps. Ces instabilités apparaissent sous la forme de séries de disques plus ou moins espacés le long du cylindre intérieur. Le temps critique (temps qui sépare de l'instant initial l'instant où apparaissent les instabilités) et l'espacement de ces instabilités sont déterminés et la courbe de stabilité est construite.

Dans l'étude théorique[55] les deux méthodes classiques sont appliquées (méthode quasi-stationnaire, problème aux valeurs initiales). L'évolution de l'énergie cinétique des perturbations au cours du temps montre que l'énergie cinétique décroit à partir de $t = 0$ jusqu'au temps critique t_c, puis croit exponentiellement pour $t > t_c$. Les résultats obtenus sur les longueurs d'onde critiques et les temps critiques par les deux méthodes sont en bon accord avec les résultats expérimentaux.

V.1.5. Travaux de J.H. Gerrard[56] et M.D. Hughes et J.H. Gerrard[57] (1971)

Ces travaux sont relatifs au mouvement de descente, à partir du repos, d'une colonne fluide dans un tube circulaire lorsque l'extrémité supérieure de la colonne est soit une surface libre soit soumise à l'action d'un piston.

En filmant[57] les trajectoires des particules colorées les auteurs ont mesuré les vitesses et ont montré que pour des nombres de Reynolds (rapportés à la vitesse de la surface libre et au diamètre du tube) supérieurs à 450 un ou plusieurs tourbillons se développent au-dessous de la surface libre.

La résolution des équations du mouvement[56] est effectuée par une méthode aux différences finies en introduisant le vecteur tourbillon. Le tourbillon de surface n'est mis en évidence par le calcul que si l'on perturbe l'écoulement de base. L'auteur obtient un tel résultat en omettant volontairement lors du calcul un certain nombre d'itérations. Les résultats obtenus sont alors en bon accord avec les résultats expérimentaux.

V.2. CRITERE DE STABILITE

Nous allons étendre aux mouvements instationnaires de révolution, le critère de Rayleigh[52] et la condition de Fjortoft-Hoiland[58].

Ce critère est une condition d'instabilité nécessaire mais non suffisante.

La vitesse W(r,t) de l'écoulement de base, est donnée par l'équation (II.2) que nous écrivons en variables dimensionnelles.

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\left(g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\right) + \nu\left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}\right) \qquad (V.1)$$

A l'écoulement de base, nous superposons, selon la "méthode des petites perturbations", une perturbation tridimensionnelle admettant une symétrie de rotation caractérisée par la pression p^+, et la vitesse de composantes $u^+(r,z,t)$, $v^+(r,z,t)$, $w^+(r,z,t)$ supposées telles que :

$$\frac{u^+}{W} \ll 1 \quad , \quad \frac{v^+}{W} \ll 1 \quad , \quad \frac{w^+}{W} \ll 1$$

Les équations de l'écoulement perturbé peuvent ainsi être linéarisées

$$\frac{\partial u^+}{\partial t} + W\frac{\partial u^+}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p^+}{\partial r} + \nu\left(\frac{\partial^2 u^+}{\nu r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u^+}{\partial r} - \frac{u^+}{r^2} + \frac{\partial^2 u^+}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial v^+}{\partial t} + W\frac{\partial v^+}{\partial z} = + \nu\left(\frac{\partial^2 v^+}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v^+}{\partial r} - \frac{v^+}{r^2} + \frac{\partial^2 v^+}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial (W+w^+)}{\partial t} + u^+\frac{\partial W}{\partial r} + W\frac{\partial w^+}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}(p+p^+) \qquad (V.2)$$

$$+ \nu\left[\frac{\partial^2 (W+w^+)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(W + w^+) + \frac{\partial^2 w^+}{\partial z^2}\right]$$

$$\frac{\partial u^+}{\partial r} + \frac{u^+}{r} + \frac{\partial w^+}{\partial z} = 0$$

$$u^+ = v^+ = w^+ = 0 \qquad \text{pour } r = R$$

les coefficients des termes en u^+, v^+, w^+ et de leurs différentes dérivées étant indépendants de z, nous sommes conduits à poser :

$$u^+ = u(r,t)\, e^{i\alpha z}$$
$$v^+ = v(r,t)\, e^{i\alpha z} \qquad (V.3)$$
$$w^+ = w(r,t)\, e^{i\alpha z}$$

avec $\lambda = \frac{2\pi}{\alpha}$ la longueur d'onde, supposée réelle et positive, des perturbations et α le nombre d'onde.

En considérant les grandeurs adimensionnelles

$$u' = \frac{u}{\omega_p h_o}, \quad v' = \frac{v}{\omega_p h_o}, \quad w' = \frac{w}{\omega_p h_o} \quad k = \alpha R$$

$$\text{et } r' = \frac{r}{R}, \quad z' = \frac{z}{R}, \quad t' = \omega_p t, \quad W' = \frac{W}{\omega_p h_o}$$

nous obtenons le système linéarisé

$$\left[DD^* - k^2 - \mathcal{V} \frac{\partial}{\partial t'}\right] \left[DD^* - k^2\right] u' = ik \frac{h_o}{R} \mathcal{V} \left[W'(DD^* - k^2)\, u' - u' \left(\frac{\partial^2 W'}{\partial r'^2} - \frac{1}{r'} \frac{\partial W'}{\partial r'}\right)\right] \qquad (V.4)$$

$$\left[DD^* - k^2 - \frac{\partial}{\partial t'}\right] v' = i k \frac{h_o}{R} \mathcal{V} W' v'$$

$$w' = \frac{i}{k} D^* u'$$

$$u' = v' = w' = W' = 0 \quad \text{pour } r' = \pm 1$$

avec $D = \frac{\partial}{\partial r'}$, et $D^* = \frac{\partial}{\partial r'} + \frac{1}{r'}$

Supposons maintenant que nous négligeons les effets de la viscosité sur les perturbations. Nous obtenons alors le système (V.5) correspondant au fluide parfait :

$$\frac{\partial}{\partial t'} \left[D D^* - k^2\right] u' + ik \frac{h_o}{R} W' \left[D D^* - k^2\right] u' - ik \frac{h_o}{R} u' \left(\frac{\partial^2 W'}{\partial r'^2} - \frac{1}{r'} \frac{\partial W'}{\partial r'}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} v' + ik \frac{h_o}{R} W'v' = 0$$

$$w' = \frac{i}{k} D^* u' \qquad (V.5)$$

$$u' = 0 \text{ pour } r' = \pm 1$$

La vitesse de l'écoulement de base, donnée par l'équation (II.14), peut être écrite sous la forme d'une double sommation de produits de fonctions de t' par des fonctions de r'

$$\frac{W}{\omega_p h_o} = \sum_{m=1}^{\infty} b_m(t') c_m(r') + \sum_{n=2}^{\infty} d_n(t') e_n(r')$$

en posant

$$b_m(t') = \frac{\varepsilon k}{2} (a_o + \Lambda a_1) e^{-\frac{\lambda_1}{\omega_p} \frac{\omega_p}{\Omega} \Omega t}$$

$$c_m(r') = \frac{J_o(x_m^o r')}{x_m^o J_1(x_m^o)}$$

$$d_n(t') = \frac{\varepsilon k}{2} \Lambda D'_n e^{-\frac{\lambda_n}{\omega_p} \frac{\omega_p}{\Omega} \Omega t}$$

$$e_n(r') = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\frac{\lambda_n}{\omega_p}}{\frac{\lambda_n}{\omega_p} - x_m^{o\,2}} \frac{J_o(x_m^o r')}{x_m^o J_1(x_m^o)}$$

avec a_o et a_1 donnés par les équations (II.10), k, Λ, D'_n des coefficients fonctions de $\mathcal{V}$ et $\varepsilon = \pm 1$ suivant le signe de la dénivellation initiale.

La forme de la vitesse de l'écoulement de base, nous conduit à admettre que les vitesses de perturbation sont elles aussi données par une sommation de produits de fonctions de r' par des fonctions de t'.

Nous allons considérer successivement les trois compo-

V.2.1. Composante u'

Nous posons

$$u'(r',t') = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(r')\, j_n(t') \qquad (V.6)$$

La première des équations (V.5) conduit à une série d'équations de la forme

$$\left(\frac{d^2 g_n}{dr'^2} + \frac{1}{r'}\,\frac{dg_n}{dr'} - k^2 g_n\right)\left(i\,k\,\frac{h_o}{R}\,W'\,j_n + \frac{dj_n}{dt'}\right)$$

$$- i\,k\,\frac{h_o}{R}\,g_n\,j_n\left(\frac{\partial^2 W'}{\partial r'^2} - \frac{1}{r'}\,\frac{\partial W'}{\partial r'}\right) = 0$$

Posons

$$L(g_n) = \frac{d^2 g_n}{dr'^2} + \frac{1}{r'}\,\frac{dg_n}{dr'} - k^2 g_n - \frac{i\,k\,\frac{h_o}{R}\,g_n\,j_n\,F(W')}{\frac{dj_n}{dt} + ik\,\frac{h_o}{R}\,j_n\,W'} = 0$$

avec $F(W') = \dfrac{\partial^2 W'}{\partial r'^2} - \dfrac{1}{r'}\,\dfrac{\partial W'}{\partial r'}$

et formons $(Lg_n)\,\overline{g_n} - (\overline{Lg_n})\,g_n = 0$ où le signe $\bar{}$ indique la quantité conjuguée complexe.

Pour simplifier les calculs nous supposons j_n réel, nous vérifierons ensuite que cette hypothèse ne limite pas le résultat obtenu.

Considérons l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \left[(Lg_n)\,\overline{g_n} - (\overline{Lg_n})\,g_n\right] r'\,dr' = 0$$

En remarquant que

$$\int_0^1 \left[\frac{d}{dr'}\,(r'\,\frac{dg_n}{dr'})\right]\overline{g_n}\,dr' = -\int_0^1 r'\,\frac{dg_n}{dr'}\,(\overline{\frac{dg_n}{dr'}})\,dr'$$

nous obtenons

$$I = 2\,ik\,\frac{h_o}{R}\,j_n\,\frac{dj_n}{dt}\int_0^1 \frac{g_n\,\overline{g_n}\,F(W')}{(\frac{dj_n}{dt})^2 + (\frac{h_o}{R}\,k\,W'\,j_n)^2}\,r'\,dr' = 0 \qquad (V.7)$$

Pour que la relation (V.7) soit vérifiée, il faut

ou bien $j_n = 0$ c'est à dire que la perturbation soit identiquement nulle

ou bien $\frac{dj_n}{dt} = 0$ c'est à dire que la perturbation ne peut croitre avec le temps.*

ou bien l'élément d'intégration de l'intégrale de l'équation V.7 nul, c'est à dire que quelque part dans l'intervalle $0 < r' < 1$, la quantité F(W') s'annule et change de signe. Nous appelons cette condition la condition I. Il est aisé de vérifier que l'hypothèse j_n réel ne limite pas le résultat obtenu:

Pour j_n complexe, posons $j_n = A_n + i\,B_n$, l'équation (V.7) devient alors:

$$I = -\,2ik\,\frac{h_o}{R}\,(A_n\,\frac{dA_n}{dt} + B_n\,\frac{dB_n}{dt}\int_0^1 \frac{g_n\,\overline{g_n}\,F\,(W')}{C^2+D^2}\,r'\,dr' = 0 \qquad (V.7')$$

avec $C = \frac{dA_n}{dt} - k\,\frac{h_o}{R}\,W'\,B_n$

---

* Par analogie avec les résultats obtenus pour les écoulements stationnaires (58, page 519), nous admettons que l'étude faite en fluide parfait ne concerne pas les perturbations amorties.

$$D = \frac{dB_n}{dt} + k \frac{h_o}{R} W' A_n$$

et les conclusions sont les mêmes que pour j_n réel .

Formons maintenant : $(Lg_n)\,\overline{g_n} + (\overline{Lg_n})\, g_n$

en supposant de nouveau j_n réel pour simplifier les calculs et considérons l'intégrale :

$$J = \int_o^1 \left[(Lg_n)\,\overline{g_n} + (\overline{Lg_n})\, g_n \right] r'\, dr' = 0$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$J = 2 \int_o^1 \frac{dg_n}{dr'} \left(\frac{\overline{dg_n}}{dr'}\right) r'\, dr' - 2k^2 \int_o^1 g_n\, \overline{g_n}\, r'\, dr'$$

$$- 2\, k^2 \left(\frac{h_o}{R}\right)^2 j_n^2 \int_o^1 \frac{W'\, F(W')\, g_n\, \overline{g_n}}{\left(\frac{dj_n}{dt}\right)^2 + k^2 \left(\frac{h_o}{R}\right)^2 W'^2\, j_n^2}\, r'\, dr' = 0$$

les deux premières intégrales de l'expression précédente étant positives, la troisième intégrale

$$\int_o^1 \frac{g_n\, \overline{g_n}\, W'\, F(W')}{\left(\frac{dj_n}{dt}\right)^2 + \left(k \frac{h_o}{R}\, j_n\, W'\right)^2}\, r'\, dr'$$

doit être négative. Il faut pour cela que la quantité

$$W' \left(\frac{\partial^2 W'}{\partial r'^2} - \frac{1}{r'} \frac{\partial W'}{\partial r'}\right)$$

soit négative dans une zone appréciable du domaine $0 < r' < 1$.
Nous appelons cette condition, la condition II.

V.2.2. Composantes v' et w'

La troisième des équations (V.5), montre que les conditions I et II, s'appliquent aussi à la composante w'.

En ce qui concerne v', nous posons

$$v'(r',t') = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(r')\, q_n(t') \qquad (V.8)$$

La deuxième des équations (V.5) conduit à une série d'équations de la forme :

$$p_n \frac{dq_n}{dt} + ik \frac{h_o}{R} W' p_n q_n = 0$$

d'où $q_n = q_{n(t=o)}\, e^{ik \frac{h_o}{R} W' dt}$

qui ne peut donc croitre indéfiniment.

Le critère de Rayleigh et la condition de Fjortoft-Hoiland sont ainsi généralisés aux mouvements instationnaires cylindriques sous la forme suivante :

Dans l'intervalle $0 < \frac{r}{R} < 1$ (V.9)

si $\frac{\partial^2\left(\frac{W}{h_o \omega p}\right)}{\partial\left(\frac{r}{R}\right)^2} - \frac{1}{\frac{r}{R}} \frac{\partial\left(\frac{W}{h_o \omega p}\right)}{\partial\left(\frac{r}{R}\right)}$ s'annule et change de signe (condition I)

et si $\frac{W}{h_o \omega p} \left(\frac{\partial^2\left(\frac{W}{h_o \omega p}\right)}{\partial\left(\frac{r}{R}\right)^2} - \frac{1}{\frac{r}{R}} \frac{\partial\left(\frac{W}{h_o \omega p}\right)}{\partial\left(\frac{r}{R}\right)}\right)$ est négatif dans une zone appréciable de l'intervalle (condition II) alors l'écoulement peut devenir instable.

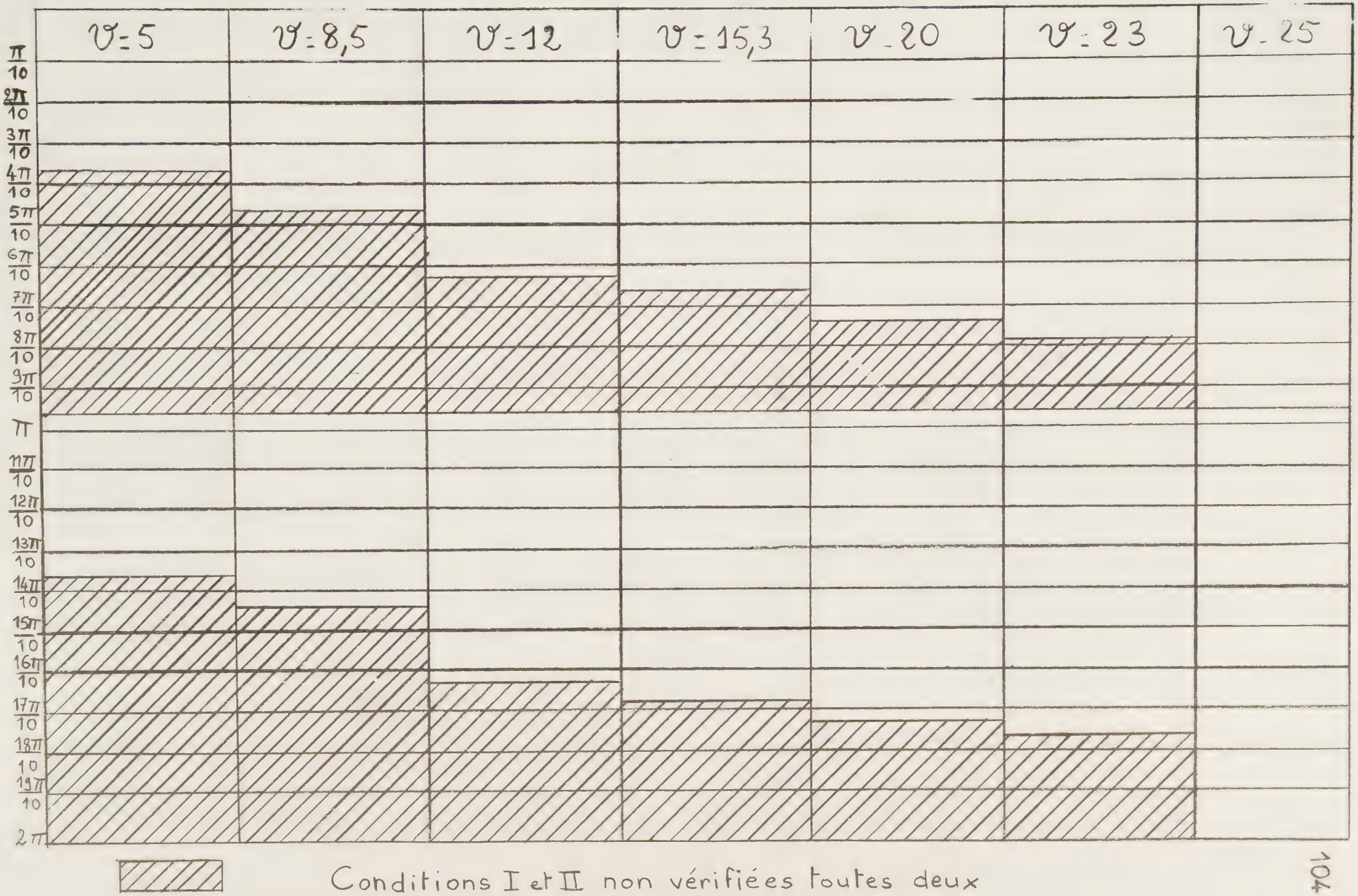
Dans l'étude numérique effectuée au chapitre III nous avons calculé en chaque instant et pour différentes valeurs du paramètre $\mathcal{V}$ la quantité

$$\frac{\partial^2\left(\frac{W}{h_o \omega_p}\right)}{\partial\left(\frac{r}{R}\right)^2} - \frac{1}{\frac{r}{R}} \frac{\partial\left(\frac{W}{\omega_p h_o}\right)}{\partial\left(\frac{r}{R}\right)}$$

les résultats obtenus montrent que (Tableau V.1) les conditions I et II sont simultanément réalisées en tout instant pour $\mathcal{V} \geqslant 25$.

La valeur 25 du paramètre $\mathcal{V}$ est donc la valeur limite au-dessous de laquelle l'écoulement est toujours stable et au-dessus de laquelle l'écoulement peut être instable.

Ce résultat confirme parfaitement les précédentes conclusions déduites de l'analyse des enregistrements de vitesse.



Conditions I et II non vérifiées toutes deux

V.3. ETUDE THEORIQUE DE LA STABILITE DE L'ECOULEMENT

Nous avons résolu les équations de la stabilité linéaire comme un problème aux valeurs initiales. Nous avons ainsi superposé à l'écoulement de base, à l'instant initial t = 0, des petites perturbations de longueur d'onde donnée et nous avons étudié l'évolution au cours du temps du rapport de l'énergie cinétique moyenne de ces perturbations à l'instant t à leur énergie cinétique moyenne à l'instant t=0.

V.3.1. Equations de base

Les perturbations étant petites et de même forme que celles données par les équations (V.3), les équations de la stabilité linéaire à résoudre sont donc les équations (V.4).

Toutefois ces équations étant complexes nous allons séparer leur partie réelle et leur partie imaginaire. Dans ce but nous posons :

$$\begin{aligned} u' &= u'_r + i\, u'_i \\ v' &= v'_r + i\, v'_i \\ w' &= w'_r + i\, w'_i \end{aligned} \qquad (V.10)$$

Nous avons donc à résoudre le système de 6 équations :

$$\left[DD^* - k^2 - \mathcal{V}\frac{\partial}{\partial t'}\right] \quad v'_r = -\, k\, W'\, v'_i \left(\mathcal{V}\frac{h_o}{R}\right)$$

$$\left[DD^* - k^2 - \mathcal{V}\frac{\partial}{\partial t'}\right] \quad v'_i = k\, W'\, v'_r \left(\mathcal{V}\frac{h_o}{R}\right) \qquad (V.11)$$

$$\left[DD^* - k^2 - \mathcal{V}\frac{\partial}{\partial t'}\right] \quad \left[DD^* - k^2\right] u'_r =$$

$$= -\, k\, \mathcal{V}\frac{h}{R^2} \left[W' (DD^* - k^2)\, u'_i - u'_i \left(\frac{\partial^2 W'}{\partial r'^2} - \frac{1}{r'}\frac{\partial W'}{\partial r'}\right)\right]$$

$$\left[DD^* - k^2 - \mathcal{V} \frac{\partial}{\partial t'} \right] \quad \left[DD^* - k^2 \right] u'_i =$$

$$= k \mathcal{V} \frac{h_o}{R} \left[W' (DD - k^2) u'_r - u'_r \left(\frac{\partial^2 W'}{\partial r'^2} - \frac{1}{r'} \frac{\partial W'}{\partial r'} \right) \right]$$

$$W'_r = - \frac{1}{k} D^* u'_i$$

$$W'_i = \frac{1}{k} D^* u'_r$$

Afin d'abaisser l'ordre des équations (V.11) qui font intervenir des dérivées quatrièmes par rapport à r nous posons

$$\psi' = (DD^* - k^2) u' \qquad (V.12)$$

c'est à dire

$$\psi' = \frac{\partial^2 u'}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial u'}{\partial r'} - \frac{u'}{r'^2} - k^2 u' \qquad (V.13)$$

avec

$$\psi' = \psi'_r + i \psi'_i$$

et dans un but de simplification, étant donné qu'il ne peut plus y avoir de confusion nous omettons les indices "primés" jusqu'au paragraphe V.3.3. inclus.

Nous sommes alors conduits à résoudre le système :

$$\mathcal{V} \frac{\partial v_r}{\partial t} = (DD^* - k^2) \quad v_r + k W \quad v_i \quad (\mathcal{V} \frac{h_o}{R})$$

$$\mathcal{V} \frac{\partial v_i}{\partial t} = (DD^* - k^2) \quad v_i - k W \quad v_r \quad (\mathcal{V} \frac{h_o}{R})$$

$$\vartheta \frac{\partial \psi_r}{\partial t} = (DD^* - k^2)\ \psi_r + k\vartheta \frac{h_o}{R} \left[W\ \psi_i - u_i \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \right) \right]$$

$$\gamma \frac{\partial \psi_i}{\partial t} = (DD^* - k^2)\ \psi_i - k\vartheta \frac{h_o}{R} \left[W\ \psi_r - u_r \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \right) \right]$$

$$w_r = -\frac{1}{k} D^* u_i \qquad (V.14)$$

$$w_i = \frac{1}{k} D^* u_r$$

avec

$$\psi_r = (DD^* - k^2)\ u_r$$

$$\psi_i = (DD^* - k^2)\ u_i$$

V.3.2. Conditions aux limites et conditions initiales

V.3.2.1. Conditions aux limites

- Sur la paroi (r = 1)

$$u_r(1,t) = u_i(1,t) = v_r(1,t) = v_i(1,t)$$

$$= w_i(1,t) = w_r(1,t) = 0$$

$$\psi_r(1,t) = \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} \right)(1,t) \qquad (V.15)$$

$$\psi_i(1,t) = \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial r^2} \right)(1,t)$$

- Sur l'axe (r = 0)

$$u_r\ (o,t) = u_i\ (o,t) = 0$$

$$v_r\ (o,t) = v_i\ (o,t) = 0$$

$$\left(\frac{\partial W_r}{\partial r}\right)\ (o,t) = \left(\frac{\partial W_i}{\partial r}\right)\ (o,t) = 0 \qquad \text{(V.16)}$$

$$\psi_r\ (o,t) = \psi_i\ (o,t) = 0$$

V.3.2.2. Conditions initiales

A l'instant t = 0 les vitesses de perturbation ne sont pas nulles. Seule la valeur de ψ pour r = 0 est connue, la valeur de ψ pour r = 1 fait intervenir la dérivée seconde de u qui est inconnue Au lieu de prendre à l'instant initial une distribution arbitraire de la vitesse de perturbation nous nous sommes donné une distribution arbitraire de la fonction ψ en tout point d'abscisse ($0 < r < 1$).

Lorsque ψ est connu pour $0 < r < 1$, l'équation (V.12) permet le calcul de u pour $0 < r < 1$ et les conditions (V.15) et (V.16) permettent le calcul de ψ et de u pour r = 0 et r = 1.

Les équations (V.14) donnent ensuite l'avancement dans le temps des fonctions ψ et v pour $0 < r < 1$. L'écriture des conditions (V.15) et (V.16) permet le calcul de v , de ψ et de u pour r = 0 et r = 1. L'équation de continuité donne la valeur de w.

V.3.3. Méthode de calcul

Nous divisons l'intervalle $0 < r < 1$ en J intervalles égaux et nous utilisons le sous-programme RANDU du système IBM pour générer une distribution aléatoire de nombres.

Pour que ces nombres puissent représenter la fonction ψ c'est à dire pour que les perturbations initiales soient petites, nous les avons multipliés par 10^{-4}

V.3.3.1. Résolution de l'équation (V.12) - Calcul de u - Discussion

La résolution de l'équation donnant ψ a été réalisée par la méthode de "sur-relaxation successive". La (k+1)ième itération sur u au point j et à la nième étape est donnée par :

$$u^n_{j,k+1} = \frac{\omega}{\lambda_j}\left[\alpha_j\, u^n_{j+1,k} + \beta_j\, u^n_{j-1,k+1} - (\Delta r)^2\, \psi^n_j\right] - (\omega - 1)\, u^n_{j,k}$$

$$j = (2,3,\ldots,J) \qquad (V.17)$$

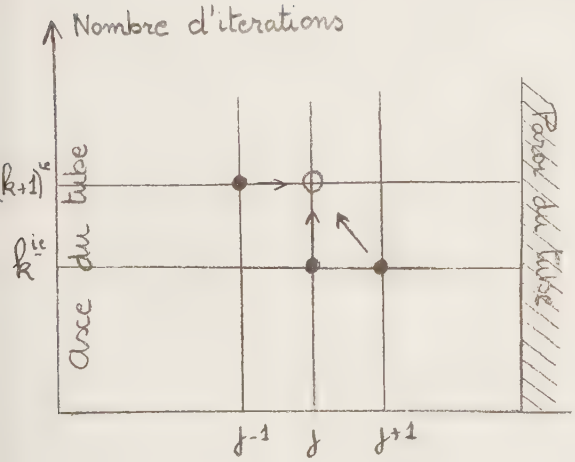
où

$$\alpha_j = 1 + \frac{\Delta r}{2r_j}$$

$$\beta_j = 1 - \frac{\Delta r}{2r_j}$$

$$\lambda_j = 2 + (\Delta r)^2\left[k^2 + \frac{1}{r_j^2}\right]$$

et où ω est le coefficient de sur-relaxation



Le calcul s'effectue en "parallélogramme" comme le montre la figure ci-contre. Lors de la première étape dans le temps on suppose à la première itération que les valeurs de u sont nulles c'est à dire que

$u^n_{j+1,1} = 0$ et $u^n_{j,1} = 0$

la relation (V.17) s'écrit alors à la deuxième itération

$$u^n_{j,2} = \frac{\omega}{\lambda_j}\left[\beta_j\, u^n_{j-1,2} - (\Delta r)^2\, \psi^n_j\right]$$

soit pour j = 2

$$u^n_{2,2} = \frac{\omega}{\lambda_2}\left[- (\Delta r)^2\, \psi^n_2\right]$$

car $u^n_{1,2} = 0$

On peut alors en faisant varier j de 2 à J calculer à une étape donnée et pour une itération donnée la distribution u(j). Pour une étape quelconque les valeurs de u à la première itération sont prises égales à celles de la dernière itération de l'étape précédente.

Le nombre d'itérations à l'étape n du calcul est terminé lorsque :

$$\frac{u^n_{j,k+1} - u^n_{j,k}}{u^n_{j,k}} < \varepsilon \qquad \forall_j$$

Afin d'harmoniser la précision des calculs et le nombre d'itérations, nous avons pris arbitrairement $\varepsilon = 10^{-3}$. Dans les nombreux cas que nous avons étudiés nous n'avons ainsi jamais dépassé 200 itérations à une étape donnée du calcul. Le coefficient de sur-relaxation ω est nécessairement tel que $1 < \omega < 2$. Il admet pour chaque valeur de $k = \alpha R$ une valeur optimale, que nous désignons par ω_{opt}, pour laquelle le nombre d'itérations à une étape donnée du calcul est minimum. Nous avons pour différentes valeurs de k et pour chaque valeur de ω calculé le nombre d'itérations nécessaires. La figure 60 montre comment évolue le nombre d'itérations en fonction de ω pour $k = 4$ et $k = 6$. On remarque que le nombre d'itérations nécessaires pour une valeur donnée de ω décroit lorsque k croit. Dans la figure 61 nous avons représenté l'évolution de ω_{opt} en fonction de k. La courbe représentative pour des valeurs de $k < 15$ est une droite de pente négative.

V.3.3.2. Calcul de ψ, v et w

A l'instant t = 0 lorsque u_j est connu pour toutes les valeurs de j = (2,3.....J) les conditions aux limites permettent le calcul de u_j et par suite de ψ_j pour j = 1 et j = J+1.

On peut alors calculer w_j pour j = (1.....J+1). Les valeurs de v_j étant arbitraires nous supposerons $v_j = u_j$. L'évolution des fonctions ψ_j et v_j dans le temps, ainsi que le calcul de w_j, est donné par les équations (V.14) qui après discrétisation par une méthode explicite aux différences finies se mettent sous la forme :

$$(v_r)_j^{n+1} = \frac{\Delta t}{\vartheta(\Delta r)^2}\left[\alpha_j (v_r)_{j+1}^n + \beta_j (v_r)_{j-1}^n + \left(\frac{\vartheta(\Delta r)^2}{\Delta t} - \lambda_j\right)(v_r)_j^n + kW\,\vartheta\,\frac{h_o}{R}(\Delta r)^2 (v_i)_j^n\right]$$

$$(v_i)_j^{n+1} = \frac{\Delta t}{\vartheta(\Delta r)^2}\left[\alpha_j (v_i)_{j+1}^n + \beta_j (v_i)_{j-1}^n + \left(\frac{\vartheta(\Delta r)^2}{\Delta t} - \lambda_j\right)(v_i)_j^n - kW\,\vartheta\,\frac{h_o}{R}(\Delta r)^2 (v_r)_j^n\right] \qquad (V.18)$$

$$(\psi_r)_j^{n+1} = \frac{\Delta t}{\vartheta(\Delta r)^2}\left\{\alpha_j (\psi_r)_{j+1}^n + \beta_j (\psi_r)_{j-1}^n + \left(\frac{\vartheta(\Delta r)^2}{\Delta t} - \lambda_j\right)(\psi_r)_j^n + k(\Delta r)^2\vartheta\frac{h_o}{R}\left[W(\psi_i)_j^n - (u_i)_j^n\left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}\right)\right]\right\}$$

$$(\psi_i)_j^{n+1} = \frac{\Delta t}{\vartheta(\Delta r)^2}\left\{\alpha_j (\psi_i)_{j+1}^n + \beta_j (\psi_i)_{j-1}^n + \left(\frac{\vartheta(\Delta r)^2}{\Delta t} - \lambda_j\right)(\psi_i)_j^n - k(\Delta r)^2\vartheta\frac{h_o}{R}\left[W(\psi_r)_j^n - (u_r)_j^n\left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}\right)\right]\right\}$$

$$(w_r)_j = -\frac{1}{k}\left[\frac{(u_i)_{j+1}}{2\Delta r} + \frac{(u_i)_j}{r_j} - \frac{(u_i)_{j-1}}{2\Delta r}\right]$$

$$(w_i)_j = -\frac{1}{k}\left[\frac{(u_r)_{j+1}}{2\Delta r} + \frac{(u_r)_j}{r_j} - \frac{(u_r)_{j-1}}{2\Delta r}\right]$$

V.3.3.3. Méthode globale de calcul

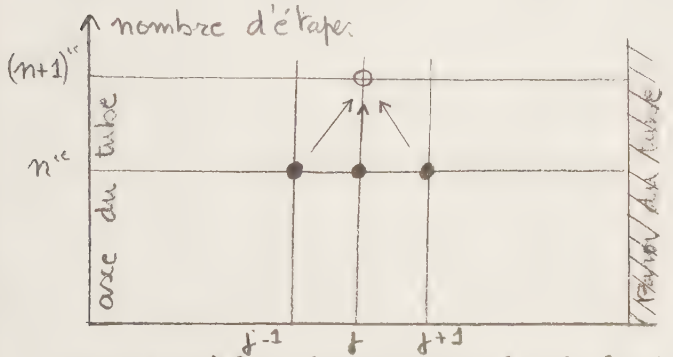
Le programme de calcul a été construit de la façon suivante : à l'instant t = 0 on se donne par le sous programme Randu une distribution aléatoire de nombres pour chaque point P_j ($j \in 2 \ldots J$). Les résultats obtenus sont multipliés par 10^{-4} afin que les perturbations initiales soient très petites.

En tenant compte de plus de la relation (V.16) nous avons les valeurs de ψ_r et de ψ_i pour tous les points P_j ($j = 1.....J$). Nous calculons u_r et u_i grâce aux relations (V.15), (V.16) et (V.17) pour tous les points P_j ($j = 1.....J+1$) l'écriture de la condition (V.15) permettant le calcul de ψ pour le point paroi ($j = J+1$).

Comme il n'existe aucune condition sur les valeurs initiales de v nous supposons $v_r = u_r$ et $v_i = u_i \; \forall \; P_j (j = 1.....J+1)$. Nous verrons plus loin que cette hypothèse est tout à fait justifiée.

Le calcul de w_r et de w_i se fait à l'aide des relations (V.18) avec les conditions (V.15) et (V.16). Il faut toutefois remarquer que la condition (V.16) conduit à une indétermination pour $r = 0$. Nous avons éliminé cette difficulté en supposant qu'entre les points P_1 et P_2 la courbe w(r) pouvait être représentée par une portion de parabole admettant un maximum pour $r = 0$. Par suite le calcul de w_r et w_i se fait aisément $\forall$ P_j ($j = 1.....J+1$)

Les conditions à l'instant Δt ont été déterminées par avancement dans le temps grâce aux relations (V.18).



Le schéma ci-contre montre comment s'effectue cet avancement. Les relations (V.18) permettent ainsi de connaitre les valeurs de v et de ψ en tous les points P_j ($j = 2.....J$). Tenant compte des relations (V.17) on procède alors au calcul de u_r et u_i par la méthode de sur-relaxation et on recommence les mêmes opérations qu'à l'étape précédente.

V.3.4. Energie cinétique moyenne de l'écoulement de base et énergie cinétique moyenne des perturbations

A chaque instant l'énergie cinétique moyenne adimensionnelle, par longueur d'onde λ, de l'écoulement de base est donnée par

$$E_b(\omega_p t) = 2\pi \int_0^1 \left(\frac{W}{\omega_p h_o}\right)^2 \frac{r}{R} \frac{dr}{R} \qquad (V.19)$$

et l'énergie cinétique moyenne adimensionnelle des perturbations est donnée par

$$E_p\ (\omega_p t) = 2\pi \int_0^1 \left\{ \left(\frac{u}{\omega_p h_o}\right)^2 + \left(\frac{v}{\omega_p h_o}\right)^2 + \frac{1}{k^2} \left[D^* \left(\frac{u}{\omega_p h_o}\right) \right]^2 \right\} d\left(\frac{r}{R}\right)$$

avec $$\left(\frac{u}{\omega_p h_o}\right)^2 = \left(\frac{u_r}{\omega_p h_o}\right)^2 + \left(\frac{u_i}{\omega_p h_o}\right)^2 \qquad (V.20)$$

et $$\left(\frac{v}{\omega_p h_o}\right)^2 = \left(\frac{v_r}{\omega_p h_o}\right)^2 + \left(\frac{v_i}{\omega_p h_o}\right)^2$$

L'énergie cinétique de référence est $\frac{\rho \pi R^3}{k} (\omega_p h_o)^2$

Afin d'obtenir l'évolution au cours du temps de l'énergie cinétique de l'écoulement de base et de l'énergie cinétique des perturbations nous avons calculé à chaque instant les quantités $E_b\ (\omega_p t)$, $E_p\ (\omega_p t)$ et $\frac{E_p(\omega_p t)}{E_p(\omega_p t=0)}$

V.3.5. Résultats obtenus et discussion

Outre le paramètre $\mathcal{V}$ et le nombre d'onde k les équations (V.18) mettent en évidence les principaux paramètres du problème à savoir $\mathcal{V}\frac{h_o}{R}$, $\Delta(\frac{r}{R})$ et $\frac{\Delta(\omega_p t)}{\mathcal{V}(\Delta\frac{r}{R})^2}$. Les paramètres $\Delta(\frac{r}{R})$ et $\frac{\Delta(\omega_p t)}{\mathcal{V}(\Delta\frac{r}{R})^2}$ sont des paramètres numériques qui entrent en jeu dans la stabilité des solutions et le paramètre $\mathcal{V}\frac{h_o}{R}$ qui joue le rôle du nombre de Reynolds a déjà été mis en évidence par l'analyse dimensionnelle effectuée au chapitre II.

Le programme de calcul*, dont la durée est dans chaque cas de 1 heure au minimum, est relatif à $\mathcal{V} = 260$; $\mathcal{V}\frac{h_o}{R} = 300$, 1000, 1500, 3000, 4000 et 5000 et à différentes valeurs entières de k ($1 \leq k \leq 7$). Nous préciserons ultérieurement ce choix des valeurs de k.

Le rôle des paramètres $\Delta(\frac{r}{R})$ et $\frac{\Delta(\omega_p t)}{\mathcal{V}(\Delta(\frac{r}{R}))^2}$ est fondamental. Nous avons pris dans tous les cas $\Delta(\frac{r}{R}) = 0{,}025$ afin de concilier la précision des calculs et la durée du programme. La figure 62 montre à titre d'exemple les valeurs de $\frac{u}{\omega_p h_o}$ obtenues à l'instant $t = 0$ pour $\Delta \frac{r}{R} = 0{,}025$ et $\Delta \frac{r}{R} = 0{,}0125$. Ces valeurs sont en bon accord leur différence relative étant toujours inférieure à 5/100.

Le choix du paramètre $\frac{\Delta(\omega_p t)}{\mathcal{V}\Delta(\frac{r}{R})^2}$ est fonction des valeurs k et de $\mathcal{V}\frac{h_o}{R}$. La valeur de ce paramètre a été prise égale à 0,05 pour $\mathcal{V}\frac{h_o}{R} \leqslant 1000$ et pour $k \leqslant 3$ et à 0,025 pour toutes les autres valeurs de k et de $\mathcal{V}\frac{h_o}{R}$.

Dans la figure 63 nous avons représenté pour $\mathcal{V}\frac{h_o}{R} = 3000$ et $k = 3$ et pour $\omega_p t$ compris entre 0 et 0,32 la variation de $\frac{E_p\ (\omega_p t)}{E_p\ (\omega_p t=0)}$ pour différentes valeurs du rapport $\frac{\Delta(\omega_p t)}{\mathcal{V}(\Delta\frac{r}{R})^2}$. Nous pouvons constater que les valeurs 0,025 et 0,01 de ce rapport conduisent à des courbes représentatives pratiquement confondues, la solution obtenue est alors numériquement stable.

La figure 64 montre la variation en fonction de $\omega_p t$ du rapport $\frac{E_p\ (\omega_p t)}{E_p\ (\omega_p t=0)}$ pour $\mathcal{V} = 260$, $\mathcal{V}\frac{h_o}{R} = 3000$, $k = 3$ lorsqu'on modifie les valeurs initiales de la composante $\frac{v}{\omega_p h_o}$ de la vitesse de perturbation.

---

* Les calculs étant longs et leur coût de revient par suite élevé nous avons étudié le seul cas $\mathcal{V} = 260$.

On vérifie que les conditions initiales $v = u$ et $v = \frac{u}{10}$ donnent des courbes représentatives pratiquement confondues. Le résultat final n'étant pas modifié par le choix des valeurs initiales nous avons pris dans tous les cas $v = u$.

La figure 65 donne en coordonnées semi-logarithmiques l'évolution au cours de la première période du mouvement de l'énergie cinétique moyenne de l'écoulement de base. A des instants correspondants l'énergie cinétique est plus faible lors de la deuxième oscillation que lors de la première.

Dans les figures 66 à 70 nous avons représenté, pour les différents cas étudiés, en coordonnées semi-logarithmiques la variation du rapport $\frac{E_p(\omega_p t)}{E_p(\omega_p t=0)}$ lors de la première période du mouvement. Les résultats obtenus permettent de classer les courbes représentatives en trois groupes :

1er Groupe : Le rapport $\frac{E_p(\omega_p t)}{E_p(\omega_p t=0)}$ décroit de façon continue au cours du temps. L'énergie cinétique moyenne des perturbations est alors (sauf au voisinage des instants $k\pi$) inférieure à l'énergie cinétique moyenne de l'écoulement de base. Dans ce cas les effets de viscosité jouent un rôle prépondérant.

2ème Groupe : Le rapport $\frac{E_p(\omega_p t)}{E_p(\omega_p t=0)}$ passe au cours de chaque demi-période par un minimum puis par un maximum et la valeur maximale de ce rapport lors de la deuxième demi-oscillation est inférieure à celle de la première demi-oscillation.

L'énergie cinétique moyenne des perturbations est alors du même ordre que l'énergie cinétique moyenne de l'écoulement de base.

Les effets de viscosité se manifestent au voisinage des instants $k\pi$ et ce d'autant plus que $\omega_p t$ est grand.

3ème Groupe . Le rapport $\frac{E_p(\omega_p t)}{E_p(\omega_p t=0)}$ passe au cours de chaque demi-période par un minimum puis par un maximum et la valeur maximale de ce rapport lors de la deuxième demi-période est supérieure à celle de la première demi-période. L énergie cinétique moyenne des perturbations est alors supérieure à l énergie cinétique moyenne de l'écoulement de base. Les effets de viscosité jouent toujours cependant un rôle prépondérant au voisinage des phases $k\pi$.

V.3.5.1. Stabilité de l'écoulement

En chaque point la vitesse de base s'annule périodiquement, par suite l'énergie cinétique des perturbations peut d'abord croitre jusqu'à une certaine valeur puis s'amortir au cours du temps sans dépasser l'ordre de grandeur de l'énergie cinétique moyenne de l'écoulement de base.

Nous avons donc considéré que l'écoulement est stable lorsque la courbe représentative du rapport $\frac{E_p(\omega_p t)}{E_p(\omega_p t=0)}$ appartient soit au groupe I soit au groupe II. L'écoulement sera supposé instable lorsque cette courbe appartient au groupe III.

En supposant ce critère de stabilité les résultats obtenus sont résumés dans le tableau V.2.

Tableau V.2.

$\frac{h_o}{R}$ \ k	1	2	3	5	7
300	S	S	S	S	S
1000	S	S	S	S	I
1500	S	S	S	I	I
3000	S	S	I	I	I
4000	S	I	I	I	I
5000	S	I	I	I	I

S. Stable
I. Instable

V.3.5.2. Vitesses de perturbations

Le tableau V.3. montre pour $\mathcal{V}\frac{h_o}{R} = 4000$ et k = 1, $\omega_p t = 0$ et $\omega_p t = 2,5$ (écoulement stable) et pour $\mathcal{V}\frac{h_o}{R} = 4000$, k = 2 $\omega_p t = 0$ et $\omega_p t = 3,18$ (écoulement instable) l'ordre de grandeur des vitesses de perturbation. L'analyse de ce tableau permet de déduire quelques remarques sur l'évolution au cours du temps des vitesses de perturbation.

1°) Ecoulement stable

Entre les instants $\omega_p t = 0$ et $\omega_p t = 2,5$.

a) pour $\frac{r}{R} = 0,95$, c'est à dire à l'intérieur de la couche limite, les vitesses de perturbation sont multipliées par 10^{-1}.

b) à l'extérieur de la couche limite $\frac{u}{\omega_p h_o}$, $\frac{v}{\omega_p h_o}$ restent du même ordre de grandeur, $\frac{w}{\omega_p h_o}$ est multiplié par 10.

2°) Ecoulement instable

Entre les instants $\omega_p t = 0$ et $\omega_p t = 3,18$

a) à l'intérieur de la couche limite, seule la composante $\frac{v}{\omega_p h_o}$ s'amortit.

b) à l'extérieur de la couche limite, $\frac{v}{\omega_p h_o}$ s'amplifie de 100 fois, $\frac{u}{\omega_p h_o}$ de 10 fois $\frac{w}{\omega_p h_o}$ reste du même ordre de grandeur.

Pour le type de perturbations que nous avons choisies ces résultats montrent donc que

α) la couche limite joue un rôle stabilisateur

β) la direction la plus favorable pour l'amplification des perturbations est la direction azimutale.

D'après cette dernière remarque il semble donc que si des perturbations du type choisi se développent au sein de l'écoulement, alors ces perturbations donneront naissance à des tourbillons de Taylor. Nous verrons plus loin que les expériences réalisées confirment ce résultat.

Tableau V.3.

		$\frac{u}{\omega_p h_o}$		$\frac{v}{\omega_p h_o}$		$\frac{w}{\omega_p h_o}$	
		$\frac{r}{R} = 0,95$	$\frac{r}{R} = 0,5$	$\frac{r}{R} = 0,95$	$\frac{r}{R} = 0,5$	$\frac{r}{R} = 0,95$	0
STABLE $\frac{h_o}{R}=4000$ $k=1$	$\omega_p t=0$	10^{-6}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-4}
	$\omega_p t=2,5$	10^{-7}	10^{-5}	10^{-7}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-4}
INSTABLE $\frac{h_o}{R}=4000$ $k=2$	$\omega_p t=0$	10^{-6}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-4}
	$\omega_p t=3,18$	10^{-6}	10^{-4}	10^{-7}	10^{-3}	10^{-5}	10^{-4}

V.3.5.3. Remarque sur l'application de la théorie de la stabilité linéaire

Bien qu'en tout point de l'écoulement la vitesse de base s'annule périodiquement au voisinage des instants $k\pi$ la théorie linéaire reste toujours valable. A un instant donné la vitesse de l'écoulement de base ne s'annule en effet que localement et en général ces points de vitesse nulle ne correspondent pas avec ceux où nous effectuons les calculs. Dans tous les cas étudiés la plus petite valeur de $\frac{W}{\omega_p h_o}$ correspondant à un point de la grille est d'ordre 10^{-2}, les vitesses de perturbation correspondantes étant d'ordre 10^{-4}.

V.4. ETUDE EXPERIMENTALE DE LA STABILITE DE L'ECOULEMENT

L'analyse des enregistrements de vitesse effectuée au chapitre IV lors de la détermination des profils des vitesses nous a conduits à définir les valeurs critiques des paramètres $\mathcal{V}$ et $\frac{h_o}{R}$ caractérisant la transition de l'écoulement laminaire à l'écoulement turbulent. L'analyse des "visualisations" de l'écoulement, effectuées par deux méthodes différentes nous a permis de compléter l'étude expérimentale de la stabilité.

a) la méthode des "surfaces de séparation" a été mise au point[13] afin de déterminer l'évolution au cours du temps du profil des déplacements et d'obtenir des indications qualitatives sur la forme du profil des vitesses. Elle consiste à créer une surface de séparation, en versant au-dessus du liquide principal une petite quantité d'un liquide auxiliaire dont les propriétés physiques sont très voisines, les deux liquides étant non miscibles et la tension interfaciale à la surface de séparation négligeable.

Nous avons utilisé cette méthode de visualisation pour l'étude de la stabilité après avoir remarqué qu'elle permet d'introduire des perturbations dans l'écoulement sous la forme de petites discontinuités des grandeurs physiques, perturbations dont on peut suivre l'évolution au cours du temps.

b) la deuxième méthode utilise les propriétés réfringentes d'une solution, les instabilités éventuelles au sein de la masse fluide sont ainsi mises en évidence.

V.4.1. Appareils et liquides utilisés

Le dispositif expérimental est celui décrit dans le chapitre IV.

Pour filmer le mouvement d'une partie de la colonne fluide nous avons utilisé une caméra 16 mm, munie d'un télé-objectif; et un éclairage continu.

Les effets de diffraction sont éliminés grâce à une cuve parallélépipédique droite de base carrée remplie d'eau entourant le tube.

Pour la méthode des surfaces de séparation nous avons utilisé successivement des huiles minérales et des solutions d'huile d'arachide et de sulfure de carbone comme liquides principaux, de l'huile d'arachide et de l'alcool ethylique comme liquides auxiliaires.

La solution réfringente est un mélange d'huile d'arachide, de sulfure de carbone et d'acétone. En faisant varier le dosage des différents constituants, on a pu obtenir des solutions homogènes possédant une gamme de coefficients de viscosité cinématique très étendue.

V.4.2. Résultats expérimentaux

V.4.2.1. Méthode de"la surface de séparation"

Nous avons filmé l'évolution de la surface de séparation au cours du temps pour $\mathcal{V}$ = 16,8 (premier régime) et pour $\mathcal{V}$ = 102 et $\mathcal{V}$ = 260 (deuxième régime) et dans chacun des cas pour différentes valeurs de $\frac{h_o}{R}$ comprises entre 1 et 50.

L'analyse de ces films montre que :

a) pour le premier régime (fig.71) la surface de séparation est nette et il n'existe pas de tourbillons à son voisinage quelle que soit la valeur de $\frac{h_o}{R}$.

b) pour le deuxième régime (fig.72)

α) Si $\frac{h_o}{R} < (\frac{h_o}{R})_{c_3}$ (à chaque valeur de $\mathcal{V}$ correspond une valeur de $(\frac{h_o}{R})_{c_3}$) la surface de séparation se comporte comme pour le premier régime.

β) Si $(\frac{h_o}{R})_{c_3} \leqslant \frac{h_o}{R} < (\frac{h_o}{R})_{c_1}$ (la définition de $(\frac{h_o}{R})_{c_1}$ est donnée page 81) un tourbillon prend naissance au-dessus de la surface de séparation à l'instant Ωt_T ($\Omega t_T < \frac{\pi}{4}$) après avoir libéré la colonne fluide. Ce tourbillon se développe au cours de la montée puis se brise au contact de la paroi, en créant une légère agitation qui s'atténue vers la fin de la première montée. La descente puis les

montées successives ne sont pas perturbées la surface de séparation est nette et il n'y a plus de tourbillons dans son voisinage.

γ) Si $\frac{h_o}{R} > (\frac{h_o}{R})_{c_1}$, le tourbillon précédent après s'être brisé au contact de la paroi donne naissance vers la fin de la première montée à un écoulement fortement perturbé que l'on observe aussi lors de la première descente.

On peut énoncer les résultats suivants :

- Pour le premier régime d'oscillation les discontinuités restent liées à la surface de séparation quel que soit $\frac{h_o}{R}$. L'écoulement est par suite toujours stable.
- Pour le deuxième régime d'oscillation et suivant la valeur de $\frac{h_o}{R}$ elles se propagent au fluide supérieur et peuvent donner naissance à un écoulement turbulent.

On peut remarquer en outre la forme du profil des déplacements lors de la première montée

- Forme à "plateau central", puis forme parabolique pour le premier régime (Fig:71)
- Forme à "plateau central" pour le deuxième régime (Fig:72).

V.4.2.2. Utilisation de la solution réfringente

Nous avons réalisé une série d'écoulements correspondant à différentes valeurs de $\mathcal{V}$ comprises entre 16,5 et 260 et différentes valeurs de $\frac{h_o}{R}$ comprises entre 1 et 50.

Nous allons analyser successivement une série de clichés caractéristiques représentés dans les figures 73 à 76 ; cette étude nous permettra de dégager certaines relations.

a) figure 73b - $\mathcal{V} = 25$ $\frac{h_o}{R} = 10$ (visualisation de l'extrémité de la colonne lors de la première descente). On observe l'évolution d'un tourbillon qui se forme au dessous de la surface libre du fluide.

b) figure 73a - $\mathcal{V} = 25$ $\frac{h_o}{R} = 30$ (visualisation au sein de la colonne lors de la première montée). L'écoulement est laminaire et on remarque à deux instants différents l'évolution de l'épaisseur de la couche limite.

c) figure 74 - $\mathcal{V} = 66$ $\frac{h_o}{R} = 9$, 20 et 50 (visualisation de la deuxième montée et de la première descente au sein de la colonne). Lors de la deuxième montée des tourbillons régulièrement espacés sont visibles au sein du fluide. On remarque lors de la deuxième descente le caractère turbulent de l'écoulement ($\frac{h_o}{R} = 50$).

d) figure 75 - $\mathcal{V} = 260$, $\frac{h_o}{R} = 4$ (visualisation au sein du fluide lors des montées et descentes successives). Un tourbillon apparait lors de la deuxième montée. Des tourbillons superposés sont ensuite visibles lors de la deuxième descente puis surtout lors de la troisième montée. Ces tourbillons éclatent par le centre lors de la phase décélérée du mouvement (3ème montée) et s'enroulent à nouveau lors de la phase accélérée de la troisième descente. Ils existent, mais de façon moins nette, lors de la quatrième montée et ils disparaissent au cours des oscillations suivantes sans jamais donner naissance à un écoulement turbulent.

Il aurait été intéressant de noter pour chaque valeur de $\frac{h_o}{R}$ le pas des tourbillons observés afin de déterminer les longueurs d'onde critiques des perturbations. Cependant ce pas varie constamment au cours du temps et de plus à un instant donné il n'est pas le même au sein de la colonne fluide.

Les différents essais effectués ont toutefois montré que d'une part le pas des tourbillons est fonction croissante de $\frac{h_o}{R}$ et que d'autre part il est au minimum de l'ordre du rayon du tube. C'est ce dernier résultat qui nous a conduit à prendre dans les calculs la valeur 7 comme limite supérieure du nombre d'onde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

e) figure 76 - $\mathcal{V} = 260\ \frac{h_o}{R} = 20$ (visualisations au sein du fluide lors des montées et descentes successives). L'écoulement, toujours laminaire lors de la première montée, est turbulent dès la première descente et pendant la phase accélérée de la deuxième montée. Pendant la phase décélérée de la deuxième montée des tourbillons apparaissent au voisinage de la paroi. L'écoulement est encore turbulent pendant la deuxième descente mais toutefois le caractère turbulent s'atténue au cours des oscillations suivantes.

L'analyse complète des essais réalisés avec la solution réfringente confirme les résultats obtenus avec la méthode des surfaces de séparation.

Elle permet en outre d'étudier le tourbillon dû à la surface libre.

Tourbillon dû à la surface libre

Quelle que soit la valeur de $\mathcal{V}$ on observe, lors de la première descente, pour toute valeur de $\frac{h_o}{R}$ supérieure à $(\frac{h_o}{R})_\ell$, un tourbillon de surface qui se développe au cours de la descente et se propage au sein de la colonne fluide.

Le tableau V.4. donne les valeurs de $(\frac{h_o}{R})_\ell$ et $(\mathcal{V}\frac{h_o}{R})_\ell$ pour différentes valeurs de $\mathcal{V}$.

Tableau V.4.

$\mathcal{V}$	$(\frac{h_o}{R})_\ell$	$(\mathcal{V}\frac{h_o}{R})_\ell$
16,5	15	247,5
25	10	250
37	6	282
66	4	264
260	1	260

On remarque que ce tourbillon apparait pour une valeur de $(\mathcal{V}\frac{h_o}{R})_\ell$ qui est sensiblement la même quel que soit $\mathcal{V}$ et qui est en moyenne égale à 260. Ce résultat est très intéressant car il confirme l'étude effectuée par Hughes et Gerrard[57] sur l'existence d'un nombre de Reynolds critique dans la descente, à partir du repos, d'une colonne fluide. Les auteurs ont en effet trouvé un nombre de Reynolds critique $R_c = \frac{U_m D}{\nu} = 450$ où U_m désigne la vitesse de descente de la surface libre. Par comparaison le produit $\mathcal{V}\frac{h_o}{R}$ joue donc le rôle d'un nombre de Reynolds rapporté au rayon du tube.

V.4.2.3. Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux

Les résultats expérimentaux concernant la stabilité de l'écoulement sont les suivants :

a) Premier régime : l'écoulement est laminaire

b) Deuxième régime

α) quelle que soit la valeur de $\frac{h_o}{R}$, la première montée de la colonne fluide est laminaire

β) Pour la valeur critique de $\frac{h_o}{R}$, $(\frac{h_o}{R})_{c_3}$ des tourbillons superposés apparaissent au sein du fluide.

γ) Pour la valeur critique de $\frac{h_o}{R}$, $(\frac{h_o}{R})_{c_1}$ l'écoulement est perturbé au voisinage de $\Omega t = \frac{3\pi}{2}$

δ) Pour la valeur critique de $\frac{h_o}{R}$, $(\frac{h_o}{R})_{c_2}$ l'écoulement est fortement perturbé et présente donc les caractéristiques d'un écoulement turbulent pendant toute la durée de la première descente. Le caractère turbulent de l'écoulement qui pour les valeurs de $\frac{h_o}{R} > (\frac{h_o}{R})_{c_2}$ s'étend aux oscillations successives tend à s'amortir lors des phases accélérées et à s'amplifier lors des phases décélérées de l'écoulement.

c) Régime intermédiaire : l'écoulement n'est jamais turbulent durant une demi-oscillation complète.

Les résultats du calcul théorique des différentes valeurs critiques de $\frac{h_o}{R}$ effectué pour $\vartheta = 260$, sont en excellent accord avec les résultats expérimentaux.

Nous n'avons pu, à cause du prix de revient de ces calculs, vérifier si la théorie donne pour $\vartheta \leq 25$ un écoulement stable.

C O N C L U S I O N

L'étude théorique que nous avons effectuée dans les deux premiers chapitres nous a permis, en supposant la vitesse fonction linéaire de l'amplitude initiale h_o de la colonne fluide, de déterminer la distribution des vitesses instantanées et de mettre en évidence différents régimes d'écoulements.

Lorsque l'écoulement est laminaire l'étude expérimentale dont les résultats sont en excellent accord avec la théorie lorsque l'écoulement est laminaire montre que pour certaines valeurs des paramètres $\mathcal{V}$ et $\frac{h_o}{R}$ l'écoulement peut devenir turbulent.

Un critère de stabilité sous la forme d'une condition nécessaire d'instabilité a été établi et une étude théorique et expérimentale de la stabilité a été réalisée pour déterminer sous quelles conditions l'écoulement peut devenir turbulent.

L'orientation de notre recherche qui nous a semblé la plus intéressante est l'écoulement du sang dans les artères. Nous montrons dans l'annexe II que certains résultats concernant la forme du profil des vitesses, les valeurs des nombres de Reynolds critiques et l'origine des perturbations, obtenus "in vivo" peuvent être expliqués par notre étude.

A N N E X E I

I - PROGRAMME DE CALCUL

```
C      CALCUL DE LA VITESSE ET AMORTISSEMENT TUBE EN ROUS-
C      NDIM  FIXE LA DIMENSION DES DEVELOPPEMENTS FAISANT INTERVENIR
C      LES FONCTIONS DE BESSEL  C'EST LE NOMBRE DE ZEROS UTILISES
C      NMAT FIXE LA DIMENSION DE LA MATRICE PERMETTANT LE CALCUL DE K
C      NDIM DOIT ETRE INFERIEUR OU EGAL A NMAT
       IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Y)
       DIMENSION TAL(50),TXO(50),TX(3),TI(3)
       DIMENSION ALPHA(50),BETA(50),BP(50)
       DIMENSION ZVA(5000),ZA(50,50),ZBP(50)
       DIMENSION EX(50),T1(50),T2(50),QUO(50),SIGMA(50),
      SQUI(50),SI(50),T3(50)
       DIMENSION H(20),HQ(10),TR(15),TU(15),OT(20)
       DIMENSION NMAX(20)
       DIMENSION TJ0(50,11),TJ1(50,11)
100    FORMAT(1H1)
105    FORMAT(F6.1)
107    FORMAT(2E14.7)
110    FORMAT(6F6.3)
115    FORMAT(7F10.6)
120    FORMAT(10X,'IAR=',I1//)
125    FORMAT(60X,'V=',F6.1/)
130    FORMAT(30X,'LAMBDA1/OMEGAP=',E14.7,10X,'OMEGA1/OMEGAP=',
      SE14.7/)
135    FORMAT(5X,10E12.5)
136    FORMAT(///)
137    FORMAT(/)
138    FORMAT(10X,'VALEURS DES ZEROS DES FONCTIONS DE BESSEL'///)
140    FORMAT(/60X,'LAMBDA=',E14.7//)
142    FORMAT(10X,20(I2,3X))
145    FORMAT(/60X,'K=',E14.7//)
147    FORMAT(1X,5(E14.7,2X))
155    FORMAT(4X,F4.1,9(9X,F4.1)//)
157    FORMAT(10X,'TABLEAU DES FONCTIONS DE BESSEL'///)
159    FORMAT(26X,'J0',29X,'J1',30X,'XMO=',E14.7//)
160    FORMAT(1X,10(E12.5,1X)/)
165    FORMAT(15X,'OMEGA1*T',25X,'PR/GR',25X,'U',30X,'UP'//)
167    FORMAT(10X,'H(0)=',E14.7//)
170    FORMAT(12X,E14.7,24X,F4.1,20X,E14.7,18X,E14.7,5X,I2)
175    FORMAT(50X,F4.1,20X,E14.7,18X,E14.7)
180    FORMAT(5X,'TABLEAU DES VALEURS DE LAMBDA'//)
182    FORMAT(5X,I2,10X,E14.7)
185    FORMAT(5X,26HTABLEAU DES VALEURS DE B'N,//)
190    FORMAT(20X,'AMORTISSEMENT',20X,'H(N-1)'//)
195    FORMAT(20X,E14.7,17X,E14.7)
       KOT=0
       NMAT=50
       NDIM=50
       PI=3.14159
       READ(5,115) (TXO(I),I=1,20)
```

```
      DO 12 I=21,50
      TXO(I)=PI*(I-0.25)+1./(2.*PI*(4.*I-1))
12    CONTINUE
      PRINT 135,(TXO(I),I=1,NDIM)
      PRINT 136
3     READ(5,105) V
      READ(5,110) (TX(I),I=1,3),(TI(I),I=1,3)
C     CALCUL DES FONCTIONS DE BESSEL
      DO 6 I=1,NDIM
      X=TXO(I)
      DO 6 KR=1,11
      READ(5,107) TJO(I,KR),TJ1(I,KR)
4     CONTINUE
6     CONTINUE
      PRINT 137
      PRINT 100
      PRINT 125,V
C     CALCUL DE LAMBDA  1
      ZV=V
      CALL AL1(ZV,ZAL,ZOM)
      IF(KOT.EQ.1) GO TO 8
      TAL(1)=ZAL
      OM=ZOM
      PRINT 130,TAL(1),OM
C     CALCUL DE LAMBDA  2,3,4
      DO 10 KAL=2,4
      XMAX=TX(KAL-1)
      XMIN=TI(KAL-1)
      CALL AL234(XMAX,XMIN,V,AL)
      TAL(KAL)=AL
10    CONTINUE
C     CALCUL DE LAMBDA  DE 5 A NDIM
      DO 15 KAL=5,NMAT
      AKAL=KAL
      TAL(KAL)=(PI*(AKAL-0.25))**2/V
15    CONTINUE
      PRINT 180
      PRINT 150,(TAL(KAL),KAL=1,NMAT)
      PRINT 136
C     RECHERCHE DE LA MATRICE  ZA(I,J)
18    DO 20 M=1,NMAT
      DEN=(TAL(1)*V-TXO(M)**2)**2+(V*OM)**2
      ALPHA(M)=((TAL(1)**2+OM**2)*V**2-TAL(1)*V*TXO(M)**2)/DEN
      ZA(M,1)=ALPHA(M)
      BETA(M)=OM*V*TXO(M)**2/DEN
      ZBP(M)=-BETA(M)
20    CONTINUE
      DO 25 J=2,NMAT
      DO 25 I=1,NMAT
```

```
      ZA(I,J)=TAL(J)*V/(TAL(J)*V-TXO(I)**2)
25    CONTINUE
      CALL ARRAY(2,NMAT,NMAT,50,50,ZVA,ZA)
      CALL SIMQ(ZVA,ZBP,NMAT,IAR)
42    DO 45 J=1,NMAT
      BP(J)=ZBP(J)
45    CONTINUE
      ALAM=1./BP(1)
      AK1=0.
      DO 50 I=1,NMAT
      T1(I)=TXO(I)**2*(TAL(1)**2+OM**2)
      T2(I)=BETA(I)-ALAM*ALPHA(I)
      T3(I)=ALPHA(I)+ALAM*BETA(I)
      AK1=AK1+(T2(I)*OM-TAL(1)*T3(I))/T1(I)
50    CONTINUE
      AK2=0.
      DO 60 J=2,NMAT
      SIGMA(J)=0.
      DO 55 I=1,NMAT
      SIGMA(J)=V/(TXO(I)**2*(TAL(J)*V-TXO(I)**2))+SIGMA(J)
55    CONTINUE
      AK2=ALAM*BP(J)*SIGMA(J)+AK2
60    CONTINUE
      AK=AK1-AK2
65    PRINT 185
      PRINT 135,(BP(I),I=1,NMAT)
      PRINT 136
      PRINT 140,ALAM
      PRINT 145,AK
      OT(1)=0.
      KT1=2
      KT2=20
      KPAS=2
67    DO 95 KT=KT1,KT2,KPAS
      OT(KT)=PI*(KT-1)
      DO 70 J=1,NDIM
      EX(J)=DEXP(-TAL(J)*OT(KT)/OM)
      NMAX(KT)=J
      IF(EX(J)-1.E-15/V**20)75,75,70
70    CONTINUE
75    ST=DSIN(OT(KT))
      CT=DCOS(OT(KT))
      H1=0.
      DO 85 I=1,NMAT
      H11=T3(I)*(OM*ST-TAL(1)*CT)
      H12=T2(I)*(TAL(1)*ST+OM*CT)
      H1=(H11+H12)*EX(1)/T1(I)+H1
85    CONTINUE
      H2=0.
```

```
      LIM=NMAX(KT)
      IF(LIM.GT.NDIM) LIM=NDIM
      DO 90 J=2,LIM
      H2=ALAM*BP(J)*EX(J)*SIGMA(J)+H2
90    CONTINUE
      H(KT)=(H1-H2)/AK
95    CONTINUE
      IF(KPAS.EQ.1) GO TO 92
      KT1=1
      KT2=1
      KPAS=1
      GO TO 67
92    PRINT 136
      PRINT 142,NMAX(1),(NMAX(KT),KT=2,20,2)
      PRINT 136
      PRINT 190
      DO 96 N=1,9
      HQ(N)=H(2*N-1)+H(2*N)
      PRINT 167,H(1)
      PRINT 195,HQ(N),H(2*N)
96    CONTINUE
C     CALCUL DE LA VITESSE
      OT(1)=0.
      OT(2)=PI/18.
      OT(3)=PI/8.
      DO 205 KT=4,16
      OT(KT)=PI/4.*(KT-3)
205   CONTINUE
      KTM1=1
      KTM2=4
204   PRINT 100
      PRINT 165
      DO 250 KT=KTM1,KTM2
      ST=DSIN(OT(KT))
      CT=DCOS(OT(KT))
      DO 202 J=1,NDIM
      EX(J)=DEXP(-TAL(J)*OT(KT)/OM)
      NMAX(KT)=J
      IF(EX(J)-1.E-15/V**20)203,203,202
202   CONTINUE
203   DO 250 KR=1,11
      TR(KR)=0.1*(KR-1)
      U1=0.
      UP1=0.
      DO 200 I=1,NDIM
      X=TXO(I)
      R=TR(KR)
      QUO(I)=TJ0(I,KR)/TJ1(I,11)
      QUI(I)=TJ1(I,KR)/TJ1(I,11)
```

```
      IF(KT.NE.1) GO TO 209
      IF(KR.NE.11) GO TO 209
      PRINT 135,QUO(I),QUI(I)
  209 AC=ALPHA(I)*CT-BETA(I)*ST
      A1=ALPHA(I)*ST+BETA(I)*CT
      U1=(A +ALAM*A1)*EX(1)*QUO(I)/TXO(I)+U1
      IF(KT.NE.5) GO TO 215
      IF(KR.NE.1) GO TO 215
      PRINT 182,I,U1
  215 UP1=(AC+ALAM*A1)*EX(1)*QUI(I)+UP1
  2(  CONTINUE
      UP2=0.
      U2=0.
      LIM=NMAX(KT)
      IF(LIM.GT.NDIM) LIM=NDIM
      DO 220 J=2,LIM
      SIGMA(J)=0.
      SI(J)=0.
      DO 210 I=1,NDIM
      SIGMA(J)=TAL(J)*V*QUO(I)/((TAL(J)*V-TXO(I)**2)*TXO(I))
     S+SIGMA(J)
      SI(J)=TAL(J)*V*QUI(I)/(TAL(J)*V-TXO(I)**2)+SI(J)
  210 CONTINUE
      U2=ALAM*BP(J)*EX(J)*SIGMA(J)+U2
      UP2=ALAM*BP(J)*EX(J)*SI(J)+UP2
  22  CONTINUE
      TU(KR)=(U2+U1)/(AK*2.)
      UP=-(UP1+UP2)/(2.*AK)
      IF(KR.EQ.1) GO TO 229
      PRINT 175,R,TU(KR),UP
      GO TO 250
  229 PRINT 137
      PRINT 170,OT(KT),R,TU(KR),UP,NMAX(KT)
  25  CONTINUE
      IF(KTM2.EQ.16)   GO TO 1000
      KTM1=KTM2+1
      KTM2=KTM1+3
      GO TO 204
 1000 CONTINUE
      END
```

```
      SUBROUTINE BJR(X,BES0,BES1,BES2,R)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Y)
      IM=100
      T0=1.
      T=1.
      T2=1.
      BES0=1.
      BES1=X/2.
      BES2=X*R/2.
    7 DO 10 I=1,IM
      IF(DABS(T)-1.E-72)15,15,8
    8 T=(-(X/(2.*I))**2)*T
      T1=T*X/(2.*(I+1))
      BES1=BES1+T1
      IF(DABS(T0)-1.E-72)15,15,9
    9 T0=(-(X*R/(2.*I))**2)*T0
      T2=T0*X*R/(2.*(I+1))
      BES0=BES0+T0
      BES2=BES2+T2
   10 CONTINUE
   15 CONTINUE
```

```
      SUBROUTINE BJ(Z,BJ0,BJ1)
      COMPLEX Z,BJ1,BJ0,T0,T1
50    FORMAT(10X,'IM=',I2,5X,4(E14.7,5X))
      KPRIM=0
      IM=20
5     BJ1=Z/2.
      BJ0=1.
      T0=1.
      DO 10 I=1,IM
6     T0=(-(Z/(2.*I))**2)*T0
      T1=T0*Z/(2.*(I+1))
      BJ1=BJ1+T1
      BJ0=BJ0+T0
10    CONTINUE
12    A1=REAL(BJ1)
      A2=AIMAG(BJ1)
      A3=REAL(BJ0)
      A4=AIMAG(BJ0)
      IF(KPRIM.EQ.1) PRINT 50,IM,A1,A2,A3,A4
      RETURN
      END



      SUBROUTINE ASYMP(X,RES,P,R)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Y)
      DIMENSION T(100)
      PI=3.14159
      IM=90
      Y=X*R
5     T(1)=1.
      PHI=Y-PI*(P/2.+0.25)
      DO 10 I=2,IM
      T(I)=T(I-1)*(4.*P*P-(2.*(I-1)-1.)**2)/(8.*Y*(I-1))
10    CONTINUE
      IM1=IM-1
      C1=0.
      EPS=1.
      DO 15 I=1,IM1,2
      C1=C1+EPS*T(I)
      EPS=-EPS
15    CONTINUE
      C2=0.
      EPS=1.
      DO 20 I=2,IM,2
      C2=C2+EPS*T(I)
      EPS=-EPS
20    CONTINUE
      RES=DSQRT(2./(Y*PI))*(DCOS(PHI)*C1-DSIN(PHI)*C2)
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE AL234 (XMAX,XMIN,V,AL)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Y)
      XM=XMIN
      DX=(XMAX-XMIN)/10.
22    DO 40 KX=1,11
      X=XM+DX*(KX-1)
      CALL BJR(X,BES0,BES1,BES2,1.)
      AIJ=V-X**2/DSQRT(2.*BES1/(X*BES0)-1.)
      IF(KX.EQ.1) GO TO 35
      IF(REP*AIJ)25,45,35
25    IF(DABS(DX)-X*1.E-6)45,45,30
30    DX=-DX/2.
      XM=X
      GO TO 22
35    REP=AIJ
40    CONTINUE
45    AL=X**2/V
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE AL1(V,AL,OM)
      COMPLEX Z,BJ1,BJ0,PHI
130   FORMAT(10X,'A=',E14.7,10X,'PHA=',E14.7,10X,'AL=',E14.7)
135   FORMAT(10X,'B=',E14.7,10X,'PHB=',E14.7,10X,'OM=',E14.7)
      KPRIM=0
      AM1=0.75
      BM1=0.40
      AM2=0.01
      BM2=1.
      PA=(AM2-AM1)/10.
      AM=AM1
10    DO 85 KA=1,11
      AL=AM+PA*(KA-1)
      BM=BM1
      PB=(BM2-BM1)/10.
20    DO 50 KB=1,11
      OM=BM+PB*(KB-1)
      RDEL=SQRT(AL**2+OM**2)
      A=SQRT(V*(RDEL+AL)/2.)
      B=SQRT(V*(RDEL-AL)/2.)
      Z=CMPLX(A,B)
      CALL BJ(Z,BJ0,BJ1)
25    PHI=BJ1/BJ0-Z*(1.+(Z**2/V)**2)/2.
      PHB=REAL(PHI)
      IF(KPRIM.EQ.1) PRINT 135,B,PHB,OM
      IF(KB.EQ.1) GO TO 40
      IF(REPB*PHB)30,30,40
30    IF(ABS(PB)-OM*1.E-6)55,55,35
35    PB=-PB/2.
      BM=OM
      GO TO 20
40    REPB=PHB
50    CONTINUE
55    PHA=AIMAG(PHI)
      IF(KPRIM.EQ.1) PRINT 130,A,PHA,AL
      IF(KA.EQ.1) GO TO 80
      IF(REPA*PHA)60,60,80
60    IF(ABS(PA)-AL*1.E-6)90,90,65
65    PA=-PA/2.
      AM=AL
      GO TO 10
80    REPA=PHA
85    CONTINUE
90    CONTINUE
```

II - DISCUSSION SUR LA METHODE DE CALCUL

La partie la plus délicate du programme concerne le calcul des fonctions de Bessel et la limitation des développements en série . Le calcul de $J_o(x)$ et de $J_1(x)$ a été effectué à l'aide de deux sous-programmes désignés "BJR" et "ASYMP".

Le sous-programme "BJR" qui calcule $J_o(x)$ et $J_1(x)$ à l'aide de développements en série, n'est valable que pour $x \leqslant 15$. Pour $x > 15$, la convergence de ces développements est très mauvaise.

Nous utilisons alors le sous-programme "ASYMP" qui calcule $J_o(x)$ et $J_o(x)$ par leurs développements asymptotiques. Nous avons calculé ces séries avec 100 termes. Les valeurs de $J_o(x)$ et $J_1(x)$ ainsi obtenues sont identiques, à 10^{-5} près, à celles des Tables Numériques[59] et les valeurs de $J_o(x_m^o)$ sont d'ordre 10^{-6} à 10^{-7}. Le calcul des fonctions de Bessel demande une attention particulière car ces fonctions apparaissent sous la forme de quotient dans le calcul de la vitesse. La moindre fluctuation risque donc de perturber le calcul de $\frac{W}{\omega_p h_o}$ et, surtout le calcul de

$$\frac{\partial\left(\frac{W}{\omega_p h_o}\right)}{\partial\left(\frac{r}{R}\right)} \quad \text{et de} \quad \frac{\partial^2\left(\frac{W}{\omega_p h_o}\right)}{\partial\left(\frac{r}{R}\right)^2}$$

En ce qui concerne les développements en série en m et n, nous avons limité les développements à 50 termes car d'une part le temps de calcul des coefficients de la matrice croit très rapidement avec m et d'autre part , bien que les termes diagonaux du déterminant augmentent indéfiniment lorsque n croit, nous avons constaté que le calcul des B'_n converge rapidement.

A titre d'exemple, pour $\vartheta = 62{,}2$ considérons le terme B_9 pour des matrices d'ordres différents.

- Pour une matrice 9 x 9 $B'_9 = 0,24160\ 10^{-4}$

- Pour une matrice 20 x 20 $B'_9 = 0,24220\ 10^{-4}$

- Pour une matrice 30 x 30 $B'_9 = 0,24222\ 10^{-4}$

Les valeurs de la vitesse à l'instant $\Omega t = \frac{\pi}{2}$, pour différentes valeurs de $\frac{r}{R}$, correspondant aux trois cas précédents sont portées dans le tableau suivant :

$\frac{r}{R}$	Matrice 9 x 9	Matrice 20 x 20	Matrice 30 x 30
0	1,10145	1,09944	1,09956
0,2	1,09967	1,09930	1,09930
0,4	1,09442	1,09426	1,09427
0,6	1,04437	1,04440	1,04441
0,8	0,76756	0,76782	0,76786
1	$0,21330\ 10^{-5}$	$0,21468\ 10^{-5}$	$0,21613\ 10^{-5}$

Le nombre de termes nécessaires dans chaque développement est évidemment fonction croissante de ϑ . En effet, lorsque ϑ croit, il est nécessaire de tenir compte d'un plus grand nombre de partiels apériodiques car les termes $\frac{\lambda_n}{\omega_p}$ sont de plus en plus petits et, par suite, l'exponentielle qui régit l'existence d'un partiel n'est plus négligeable.

En résumé pour avoir une marge de sécurité suffisante nous avons pris pour $\vartheta \leqslant 60$ une matrice 20 x 20, pour $200 > \vartheta > 60$ une matrice 30 x 30 et au-delà, une matrice 50 x 50.

Les valeurs de x_m^o ont été introduites sous forme de données pour $m \leqslant 20$ et calculées par les expressions asymptotiques pour $m > 20$.

Le calcul des facteurs d'amortissement et de la pseudo-période a été effectué à l'aide des trois sous-programmes "BJ(z)", "AL1", "AL 234" qui permettent de calculer les racines de l'équation (II.6), la valeur de $\frac{\lambda_1}{\omega_p}$ et de $\frac{\Omega}{\omega_p}$ et la valeur de $\frac{\lambda_2}{\omega_p}$, $\frac{\lambda_3}{\omega_p}$, $\frac{\lambda_4}{\omega_p}$.

A N N E X E II

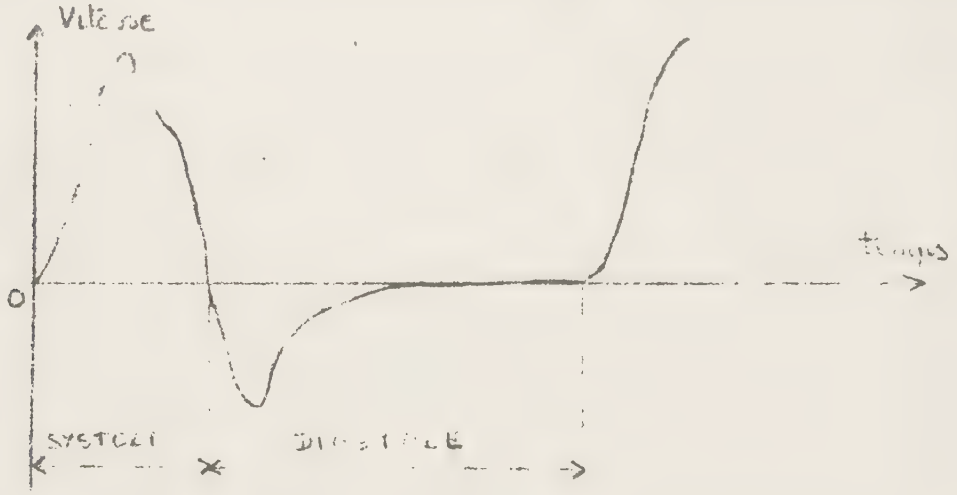
APPLICATIONS A L'ETUDE DE L'ECOULEMENT DU SANG DANS LES ARTERES

Certains résultats, en particulier ceux qui concernent la forme des profils des vitesses et les conditions de transition dans l'écoulement du sang dans l'aorte et les autres artères peuvent être justifiés à partir de notre étude.

Nous énonçons d'abord quelques résultats expérimentaux obtenus "in vivo" par différents auteurs, nous les comparons ensuite avec ceux déduits de notre étude.

A.II.1. ANALYSE DES TRAVAUX ANTERIEURS

Le mouvement du sang dans les artères est périodique. Une période du mouvement est constituée par une systole suivie d'une diastole



Lors de la systole le coeur envoie, par l'intermédiaire du ventricule gauche et à travers la valve aortique, le sang dans l'aorte ascendante Le mouvement est accéléré puis décéléré. A la fin de la systole, la valve aortique se referme, le fluide est alors animé d'un mouvement de retour suivi d'un temps de repos. Cette deuxième phase du mouvement correspond à la diastole.

A N N E X E II

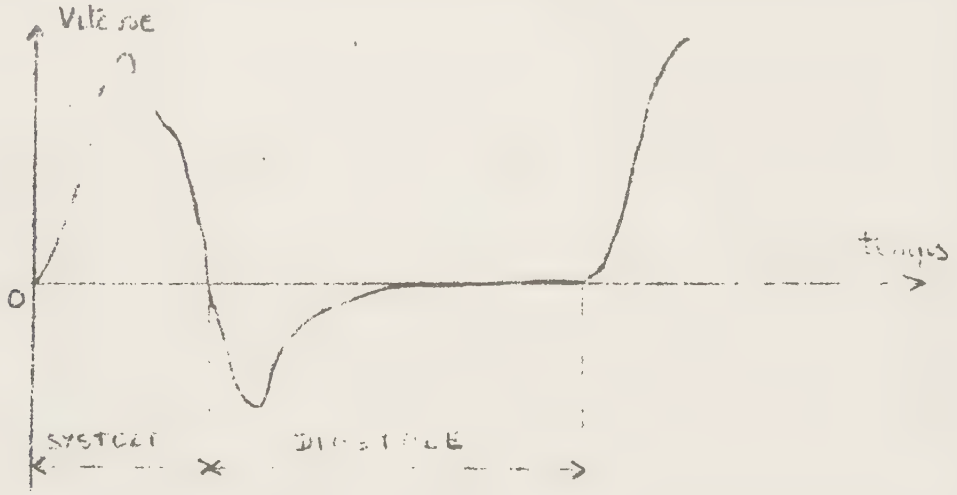
APPLICATIONS A L'ETUDE DE L'ECOULEMENT DU SANG DANS LES ARTERES

Certains résultats, en particulier ceux qui concernent la forme des profils des vitesses et les conditions de transition dans l'écoulement du sang dans l'aorte et les autres artères peuvent être justifiés à partir de notre étude.

Nous énonçons d'abord quelques résultats expérimentaux obtenus "in vivo" par différents auteurs, nous les comparons ensuite avec ceux déduits de notre étude.

A.II.1. ANALYSE DES TRAVAUX ANTERIEURS

Le mouvement du sang dans les artères est périodique. Une période du mouvement est constituée par une systole suivie d'une diastole



Lors de la systole le coeur envoie, par l'intermédiaire du ventricule gauche et à travers la valve aortique, le sang dans l'aorte ascendante Le mouvement est accéléré puis décéléré. A la fin de la systole, la valve aortique se referme, le fluide est alors animé d'un mouvement de retour suivi d'un temps de repos. Cette deuxième phase du mouvement correspond à la diastole.

A.II.1.1. Travaux de Mc. Donald[60] et [61] (1952) et de Hale Mc. Donald et Womersley[62] (1955)

Les deux premières études ont été réalisées "in vivo" à l aide de lapins anesthésiés, les mesures de vitesse étant effectuées dans l'aorte abdominale dont les parois sont translucides.

L'auteur [60] détermine, en injectant des bulles d'air ou des particules colorées au sein de l'écoulement et en filmant leur trajectoire à l'aide d'une caméra rapide (1500 images/seconde), l'évolution de la vitesse au cours du temps. Les vitesses atteintes au pic systolique sont de l'ordre de 60 cm/s.

Cette méthode est à nouveau employée[61] pour déterminer la nature de l'écoulement. Par émission d'un liquide coloré dans toute la section l'auteur met en évidence la forme du profil des vitesses et lors du pic systolique le caractère turbulent de l'écoulement. Des visualisations effectuées à la bifurcation des deux artères iliaques mettent en évidence l'existence d'un tourbillon. L'auteur définit un nombre de Reynolds $Re = \frac{V_m R}{\nu}$ où V_m désigne la valeur maximale de la vitesse moyenne dans la section. Le nombre de Reynolds critique (de 300 à 550 suivant la valeur choisie du coefficient de viscosité cinématique), est beaucoup plus faible que le nombre de Reynolds critique d'un écoulement permanent.

En collaboration avec Hale et Womersley[62] l'auteur poursuit son étude en mesurant la distribution des vitesses dans les artères fermorales de trois chiens. Ces artères ont le même diamètre externe que l'aorte abdominale des lapins mais elles sont beaucoup moins translucides. Ces mesures permettent le tracé des profils des vitesses expérimentaux. Ces profils sont du type couche limite jusqu'à $\Omega t = \frac{4\pi}{10}$ puis du type pleinement développé. L'observation de la configuration de l'écoulement montre que celui-ci est toujours laminaire bien que la valeur du nombre de Reynolds soit la même que dans les études effectuées sur les lapins. Cette remarque conduit les auteurs à introduire un nombre de Reynolds effectif lié au paramètre de fréquence $R\sqrt{\frac{\Omega}{\nu}}$.

A.II.1.2. Travaux de Bellhouse[63] (1969)

L'auteur détermine la distribution de pression dans des valves aortiques normales ou avec sténose. Cette étude est effectuée avec un modèle rigide, elle est complétée par une étude théorique qui suppose le fluide parfait. Pour une valve normale on peut observer que des tourbillons sont formés dans les sinus aortiques. Ces tourbillons permettent d'éviter la formation d'un jet durant la fermeture de la valve. Dans le cas d'une sténose il n'y a plus de tourbillons et il se forme un jet turbulent avec une réduction de pression entre le ventricule et l'entrée des artères coronaires.

A.II.1.3. Travaux de Schultz, Tunstall-Pedoé, Lee, Gunning and Bellhouse[64] (1968)

En utilisant un appareillage et des sondes spécialement mis au point ces auteurs réalisent à l'aide d'un anémomètre à film chaud les mesures de vitesse dans l'aorte et les artères pulmonaires de chiens anesthésiés, puis sur des hommes lors d'opérations sur la valve mitrale et sur la valve aortique. Ces mesures de vitesse sont effectuées en différents points de l'aorte (aorte montante, arche aortique, aorte descendante). Chez les chiens ces expériences montrent que les vitesses maximales sont de 25 à 75 cm/s et les nombres de Reynolds correspondant (rapportés à la vitesse maximale) de 790 à 2370. Pour un diamètre de 1,2 cm l'écoulement est turbulent au pic systolique. Chez les hommes les vitesses maximales atteintes sont de l'ordre de 70 à 440 cm/s. Pour une vitesse de 70 cm/s et un nombre de Reynolds de 4400 l'écoulement est toujours laminaire. Le profil des vitesses dans l'aorte ascendante, dans la arche aortique et dans la première partie de l'aorte descendante est sensiblement plat durant tout le cycle cardiaque. Dans les artères fémorales pour les hommes et pour les chiens le profil des vitesses est pleinement développé.

A.II.1.4. Travaux de Nerem, Seed et Wood[65] (1972)

Ces auteurs effectuent la mesure des vitesses instantanées en différents points de l'aorte thoracique des chiens à l'aide d'un anémomètre à film chaud. Ces mesures sont ensuite moyennées dans le temps. De plus une analyse spectrale des signaux de vitesse leur

permet d'obtenir des résultats qualitatifs sur l'évolution des perturbations lorsque l'écoulement devient turbulent. La vitesse moyenne dans le temps varie de 5 à 30 cm/s. Les profils de vitesse sont du type couche limite l'épaisseur de celle-ci étant toujours inférieure à 2 mm. Dans la arche aortique les profils ne sont pas symétriques. Les enregistrements de vitesse, même ceux effectués à l'entrée de l'aorte, sont perturbés. Les auteurs discutent longuement sur l'origine de ces perturbations. Le tourbillon qui se forme[63] lors du remplissage du ventricule et qui persiste lors de la contraction ventriculaire a une influence sur l'écoulement à l'entrée de l'aorte. De même l'angle de l'axe du ventricule avec celui de l'aorte doit jouer un rôle. Les perturbations peuvent aussi provenir de l'écoulement potentiel (notamment celles observées pendant le début de la diastole) ou de la couche limite.

L'observation des enregistrements de vitesse montre que les perturbations sont plus amplifiées dans la arche aortique que dans l'aorte descendante, ce qui tend à prouver que l'origine de la turbulence est dûe plutôt au tourbillon ventriculaire qu'aux instabilités de la couche limite. En comparant les enregistrements dans l'aorte ascendante et dans l'aorte descendante on constate que sans injection d'isoprénaline l'écoulement est seulement perturbé dans l'aorte ascendante. Avec injection d'isoprénaline l'écoulement dans l'aorte descendante est plus perturbé que dans l'aorte ascendante mais toutefois les perturbations semblent naitre localement à partir de la couche limite.

L'existence des perturbations n'est pas seulement liée au nombre de Reynolds maximum mais aussi à la fréquence d'oscillation. Les auteurs établissent deux relations expérimentales, pour des mesures effectuées sur l'axe de l'aorte, entre le nombre de Reynolds critique Re_c et le paramètre de fréquence $\frac{\Omega R^2}{\nu}$:

$$Re_c = 150 \sqrt{\frac{\Omega R^2}{\nu}} \quad \text{(aorte ascendante)}$$

$$Re_c = 250 \sqrt{\frac{\Omega R^2}{\nu}} \quad \text{(aorte descendante)}$$

Ces relations sont justifiées à partir de la théorie de la stabilité de la couche limite.

La stabilité dans la couche limite est étudiée en considérant l'effet des points d'inflexion des profils de vitesse durant la décélération systolique et en examinant les caractéristiques de stabilité des profils de Falkner-Skan. Les résultats expérimentaux sont ensuite comparés avec les courbes de stabilité neutre de Falker-Skan. Cette comparaison montre que les points d'inflexion des profils des vitesses durant la décélération systolique jouent un rôle fondamental.

A.II.2. Comparaison des précédents résultats avec ceux déduits de notre étude

Nous allons comparer le mouvement du sang durant la systole au mouvement oscillatoire libre durant la première demi-période le paramètre de fréquence $\frac{\Omega R^2}{\nu}$ jouant le rôle du paramètre $\mathcal{V}$.

A.II.2.1. Forme du profil des vitesses

Les précédentes études ne permettent pas une comparaison quantitative sur la distribution des vitesses. Toutefois, en ce qui concerne la forme du profil des vitesses, elles conduisent aux remarques suivantes :

- Pour $\frac{\Omega R^2}{\nu} = 12$ le profil des vitesses est du type couche limite puis du type pleinement développé
- Pour $\frac{\Omega R^2}{\nu} = 300$ le profil des vitesses est du type couche limite.

Ces remarques sont en plein accord avec les résultats de notre étude.

A.II.2.2. Nombres de Reynolds critiques

Nous allons montrer que si l'on considère pour chacun des essais réalisés "in vivo" le paramètre $\frac{\Omega R^2}{\nu}$ alors on peut prévoir le caractère de l'écoulement et déterminer la valeur du nombre de Reynolds critique.

Définissons d'abord le nombre de Reynolds, rapporté au diamètre de l'artère, $R_e = \frac{V_i D}{\nu}$ avec V_i la vitesse de référence. Tenant compte des résultats de notre étude nous avons

$$R_{ec} = 2 \frac{V_i}{\Omega h_o} \left(\frac{h_o}{R}\right)_{c_1} \times \frac{\Omega R^2}{\nu} ,$$

$\frac{V_i}{\Omega h_o}$ étant une fonction implicite de $\frac{\Omega R^2}{\nu}$ et $\left(\frac{h_o}{R}\right)_{c_1} = 175 \left(\frac{\Omega R^2}{\nu}\right)^{-0,6}$

Par suite :

$$R_{ec} = 350 \frac{V_i}{\Omega h_o} \left(\frac{\Omega R^2}{\nu}\right)^{0,4}$$

Expériences sur les chiens

Dans la référence (65) les auteurs ont montré que le nombre de Reynolds critique, rapporté à la valeur maximale de la vitesse sur l'axe de l'aorte et au rayon de l'aorte, est lié au paramètre $\frac{\Omega R^2}{\nu}$ par les relations

$$R_{ec} = 250 \sqrt{\frac{\Omega R^2}{\nu}} \qquad \text{(aorte descendante)}$$

$$R_{ec} = 150 \sqrt{\frac{\Omega R^2}{\nu}} \qquad \text{(aorte ascendante)}$$

D'après notre étude pour $V_i = V_{max}$, c'est à dire pour $\frac{V_i}{\Omega h_o} \simeq 1,05$ nous avons en prenant le rayon de l'aorte comme longueur de référence

$$R_{ec} = 190 \left(\frac{\Omega R^2}{\nu}\right)^{0,4}$$

Dans la référence (62) les auteurs ont vérifié pour $V_i = V_m = 105$ cm/s (V_m vitesse moyenne maximale au cours de la systole), D = 0,3 cm, $\Omega = 19\ s^{-1}$ et $\nu = 3,8\ 10^{-2}$ CGS soit pour $R_c = 830$ et $\frac{\Omega R^2}{\nu} = 11$ que l'écoulement est toujours laminaire.

D'après notre étude ce résultat s'explique aisément car pour une telle valeur de $\frac{\Omega R^2}{\nu}$ l'écoulement est toujours stable.

Expérience sur les lapins

Dans la référence (61) les auteurs ont trouvé que si $V_m = 60$ cm/s, D = 0,3 cm, $\nu = 1,6\ 10^{-2}$ CGS, $\Omega = 38\ s^{-1}$ soit $\frac{\Omega R^2}{\nu} = 53$ alors $R_{ec} = 1100$.
D'après notre étude nous avons alors $\left(\frac{h_o}{R}\right) \simeq 15$, $\frac{V_m}{\Omega h_o} \simeq 0,8$ soit $R_{ec} = 1200$, valeur qui confirme la précédente.

L'écoulement peut donc être turbulent pour un nombre de Reynolds assez faible.

Expériences sur les hommes

Dans la référence (64) les auteurs ont vérifié que pour $V_{max} = 70$ cm/s, D = 2,4 cm, $\nu = 3,8\ 10^{-2}$ CGS, $\Omega = 10\ s^{-1}$, soit pour

$\frac{\Omega R^2}{\nu} \sim 380$ et $R_e = 4300$ l'écoulement est laminaire.

D'après notre étude pour $\frac{\Omega R^2}{\nu} = 380$, $(\frac{h_o}{R})_G \sim 5$, $\frac{V_{max}}{\Omega h_o} \sim 1,05$ soit $R_{ec} = 4000$.

L'écoulement peut donc être laminaire pour un nombre de Reynolds très élevé.

A.II.2.3. Discussion et comparaison sur l'origine des perturbations

Pour les expériences que nous avons réalisées avec un écoulement partant du repos et sans agitation préalable nous avons vérifié pour des valeurs de $\frac{h_o}{R}$ allant jusqu'à 50 que l'écoulement ne devient jamais turbulent lors de la première montée alors qu'il peut l'être lors de la première descente. Ce résultat tend à montrer, en accord avec les enregistrements effectués au chapitre IV, que les perturbations n'ont pas pour origine l'écoulement potentiel ou la géométrie de l'écoulement mais seulement la couche limite. De plus, il confirme la remarque de Nerem et autres (5) selon laquelle la turbulence observée dans l'aorte ascendante lors de la systole est due aux perturbations introduites par la déviation de l'écoulement à la sortie du ventricule et par le tourbillon ventriculaire.

Les perturbations que nous avons observées lors de la première descente ayant la même origine que celles qui apparaissent dans l'aorte descendante d'un chien la relation $R_{ec} = 190\ (\frac{\Omega R^2}{\nu})^{0,4}$ doit être comparée à la relation $R_{ec} = 250\ (\frac{\Omega R^2}{\nu})^{0,5}$.
Par suite les nombres de Reynolds critiques que nous avons obtenus sont inférieurs à ceux trouvés dans l'aorte descendante d'un chien.

En résumé de cette annexe il apparait que notre étude confirme très bien les différents résultats obtenus "in vivo" sur le mouvement du sang dans l'aorte et dans les artères pendant la phase systolique. Elle permet de connaitre la forme du profil des vitesses et de déterminer le nombre de Reynolds critique. De plus elle apporte des informations sur l'origine des écoulements turbulents.

Pour de tels mouvements il apparait que la valeur du nombre de Reynolds couramment défini ne permet pas de rendre compte du caractère de l'écoulement. Il est nécessaire de tenir compte dans chaque cas de la valeur du paramètre de fréquence et de déterminer la valeur du nombre de Reynolds critique qui lui est associé.

Vu et permis d'imprimer

Marseille, le 3 Novembre 1972

Le Président,

F. BOREL

BIBLIOGRAPHIE

(1) VALENSI (J.), 1947 - C.R.A.S., 224, 446-448.

(2) VALENSI (J.) et CLARION (Cl.), 1947 - C.R.A.S., 224, 532-534.

(3) VALENSI (J.), 1947 - C.R.A.S., 224, 893-894.

(4) VALENSI (J.) et VOGEL (Th.), 1947 - C.R.A.S., 224, 1695-1697.

(5) VALENSI (J.) et VOGEL (Th.), 1948 - Publ. Sc. Tech. du Ministère de l'Air, 212.

(6) VALENSI (J.) et CLARION (Cl.), 1948 - C.R.A.S., 226, 554-556.

(7) KARMAN (Th. Von) et VALENSI (J.), 1948 - C.R.A.S., 227, 105-106.

(8) VALENSI (J.), CLARION (Cl.) et ZERNER (F.), 1950 - C.R.A.S., 230, 2002-2004.

(9) ZERNER (F), 1950 - C.R.A.S., 231, 110-112.

(10) CLARION (Cl.), 1950 - C.R.A.S., 230, 1926-1928.

(11) CLARION (Cl.), 1952 - C.R.A.S., 235, 17-19.

(12) VALENSI (J.) et CLARION (Cl.), 1953 - C.R.A.S., 227, 1138-1140.

(13) CLARION (Cl.), 1955 - Mouvement oscillatoire avec viscosité et inertie. Publ. Sc. Tech. du Ministère de l'Air, 303.

(14) VALENSI (J.) et CLARION (Cl.), 1952 - C.R.A.S., 235, 1097-1099.

(15) VALENSI (J.) et CLARION (Cl.), 1953 - Oscillations amorties d'une sphère dans un fluide visqueux, Bulletin de la Société Française des Mécaniciens n°8.

(16) CLARION (Cl.), 1955 - C.R.A.S., 240, 2049-2051.

(17) CLARION (Cl.), 1957 - C.R.A.S., 244, 2226-2228.

(18) BOREL (M.), 1970 - Contribution à l'étude du mouvement oscillatoire libre d'un fluide pesant et visqueux. Thèse de Doctorat de Spécialité. (Mécanique des Fluides). Marseille.

(19) PELISSIER (R.) et CLARION (Cl.), 1971 - C.R.A.S., 273, 265-268.

(20) CLARION (Cl.) et PELISSIER (R.), 1971 - C.R.A.S., 273, 381-384.

(21) MENNERET (M.), 1911 - Mouvement oscillatoire et mouvement uniforme des liquides dans les tubes cylindriques. Coefficient de frottement interne. Thèse. Sc. Phys. Paris, 19-88 (Grenoble, Impr. Allier).

(22) CHRISTOPHERSON (D.G.), GEMANT (A.), HOGG (A.H.A.) et SOUTHWELL (R.V.) 1938 - Proc. Roy. Soc. London (A), 168, 351-378.

(23) VALEMBOIS (J.), 1946 - Contribution à l'étude de la mesure des pressions variables, Thèse Sc. Phys. Grenoble 35-36 (Paris, Hermann 1948).

(24) URY (J.F.), 1962 - Viscous damping in oscillating columns ; its magnitude and limits, Int. J. Mech. Sci. Vol. 4 p. 349-369.

(25) URY (J.F.), 1964 - A graphical method for a closer study of Richardson, Annular effect, ZAMP Vol. 15, p. 306-310.

(26) LAMBOSSY (P.) et GIORNELLI (A.), 1968 - Docteurs Ingénieurs.

(27) Mme HUETZ-AUBERT et J. HUETZ, 1959 - Influence de l'hystérésis capillaire sur l'écoulement d'un liquide. Cas des oscillations dans un tube en U. Application aux métaux fondus. Publ. Sc. Tech. du Ministère de l'Air, 347.

(28) ABRAMOVITCH (T.M.) et KRAVTCHENKO (A.E.) 1968.

(29) VIVES (Ch.), 1963 - Contribution à l'étude de phénomènes oscillatoires en magnétodynamique des liquides. Publ. Sc. de l'Université d'Alger.

(30) GRACE (S.F.), 1928 - Phil. Mag. (7), 5, 933-939.

(31) SEXL (Th.), 1930 - Z. Phys, 61, 349-362.

(32) LAMBOSSY (P.), 1952 - Helv. Phys. Acta, XXV, 4, 371-386.

(33) WOMERSLEY (J.R.), 1955 - Phil. Mag (7), 46, 199

(34) WOMERSLEY (J.R.), 1955 - J. Physiologie 127, 553-563

(35) UCHIDA (S.), 1956 - Z. Angew. Math. u. Phys., 7 (5), 404-422.

(36) URATA (E.), 1971 - Bulletin of the J.S.M.E., 14 (68), 147-155.

(37) RICHARDSON (E.G.) and TYLER (E.), 1929 - Proc. Phys. Soc. 42-1.

(38) HARRIS (J.), PEEV (G.) and WILKINSON (W.C.), 1969 - Journal of Scientific Instruments (Journal of Physics E) Série 2 - Volume 2.

(39) LINFORD (R.G.) and RYAN (N.W.), 1965 - J. Appl. Phys. 20, 1078-1082.

(40) DENISON (E.B.) and STEVENSON (W.H.), 1970 - The review of Scientific Instruments - Vol. 41 n° 10.

(41) GERRARD (J.H.), 1971 - J. Fluid Mech., 46 (1), 43-64.

(42) GERRARD (J.H.) and HUGHES (M.D.), 1971 - J. Fluid. Mech. 50 (1), 97-106.

(43) HERSHEY (D.) and CHI-SOON (I.M.), 1968 - Aiche Journal, Vol. 14 n° 5.

(28) ABRAMOVITCH (T.M.) et KRAVTCHENKO (A.E.) 1968.

(29) VIVES (Ch.), 1963 - Contribution à l'étude de phénomènes oscillatoires en magnétodynamique des liquides. Publ. Sc. de l'Université d'Alger.

(30) GRACE (S.F.), 1928 - Phil Mag (7), 5, 933-939.

(31) SEXL (Th.), 1930 - Z. Phys, 61, 349-362.

(32) LAMBOSSY (P.), 1952 - Helv. Phys. Acta, XXV, 4, 371-386.

(33) WOMERSLEY (J.R.), 1955 - Phil. Mag (7), 46, 199

(34) WOMERSLEY (J.R.), 1955 - J. Physiologie 127, 553-563

(35) UCHIDA (S.), 1956 - Z. Angew. Math. u. Phys., 7 (5), 404-422.

(36) URATA (E.), 1971 - Bulletin of the J.S.M.E., 14 (68), 147-155.

(37) RICHARDSON (E.G.) and TYLER (E.), 1929 - Proc. Phys. Soc. 42-1.

(38) HARRIS (J.), PEEV (G.) and WILKINSON (W.C.), 1969 - Journal of Scientific Instruments (Journal of Physics E) Série 2 - Volume 2.

(39) LINFORD (R.G.) and RYAN (N.W.), 1965 - J. Appl. Phys. 20, 1078-1082.

(40) DENISON (E.B.) and STEVENSON (W.H.), 1970 - The review of Scientific Instruments - Vol. 41 n° 10.

(41) GERRARD (J.H.), 1971 - J. Fluid Mech., 46 (1), 43-64.

(42) GERRARD (J.H.) and HUGHES (M.D.), 1971 - J. Fluid. Mech. 50 (1), 97-106.

(43) HERSHEY (D.) and CHI-SOON (I.M.), 1968 - Aiche Journal, Vol. 14 n° 5.

(44) GILBRECH (D.A.) and COMBS (G.D.), 1963 - Developments in theor. and Applied Mech., 1, 292-304.

(45) YELLIN (E.L.), 1966 - Circul. Research, XIX, 791-804.

(46) SARPKAYA (T.), 1966 - Trans. of the A.S.M.E. (Journ. of Bas. Engin) 589-598.

(47) MILLER (J.A.) and FEJER (A.A.), 1964 - J. Fluid Mech. 18, 438-448.

(48) OBREMSKI (H.J.) and FEJER (A.A.), 1967 - J. Fluid. Mech. 29(1), 93-111.

(49) GROSH (C.E.) and SALWEN (H.), 1968 - J. Fluid. Mech. 34 (1), 177-205.

(50) CONRAD (P.W.) and CRIMINALE (W.O.), 1965 a - Z. Angew. Math. Phys. 16, 233-254.

(51) CONRAD (P.W.) and CRIMINALE (W.O.), 1965 b - Z. Angew. Math. Phys. 16, 569-581.

(52) LORD RAYLEIGH, 1895 - Scientific Papers, 3, 594-596, Cambridge Univ. Press.

(53) SHEN (S.F.), 1961 - J. Aerospace Sci. 28-397.

(54) KIRCHNER (R.P.) and CHEN (C.F.), 1971 - J. Fluid Mech. 40 (1), 39-47.

(55) KIRCHNER (R.P.) and CHEN (C.F.), 1971 - J. Fluid Mech. 48 (2), 365-384.

(56) GERRARD (J.H.), 1971 - J. Fluid. Mech. 50 (4), 625-644.

(57) GERRARD (J.H.) and HUGHES (M.D.), 1971 - J. Fluid Mech. 50 (4), 645-655.

(58) ROSENHEAD, 1963 - Laminar boundary layers , p. 519.

(59) BESSELS FUNCTIONS : British association mathematical tables.

(60) Mc. DONALD (D.A.), 1952 - J. Physiologie 118, 328-339.

(61) Mc. DONALD (D.A.), 1952 - J. Physiologie 118, 340-347.

(62) HALE (J.F.), Mc. DONALD (D.A.) and WOMERSLEY (J.R.), 1955 - J. Physiologie 128, 629-640.

(63) BELLHOUSE (B.J.), 1969 - J. Fluid. Mech. 37(3), 587-600.

(64) SCHULTZ (D.L.), TUNSTALL-PEDOE (D.S.), LEE (G. de J.), GUNNING (A.J) and BELLHOUSE (B.J.), 1968 - CIBA Foundation Symposium on Circulatory and Respiratory Mass Transport, London, 16-18 July, 1968.

(65) NEREM (R.M.), SEED (W.A.) and WOOD (N.B.), 1972 - J. Fluid. Mech. 52 (1), 137-160.

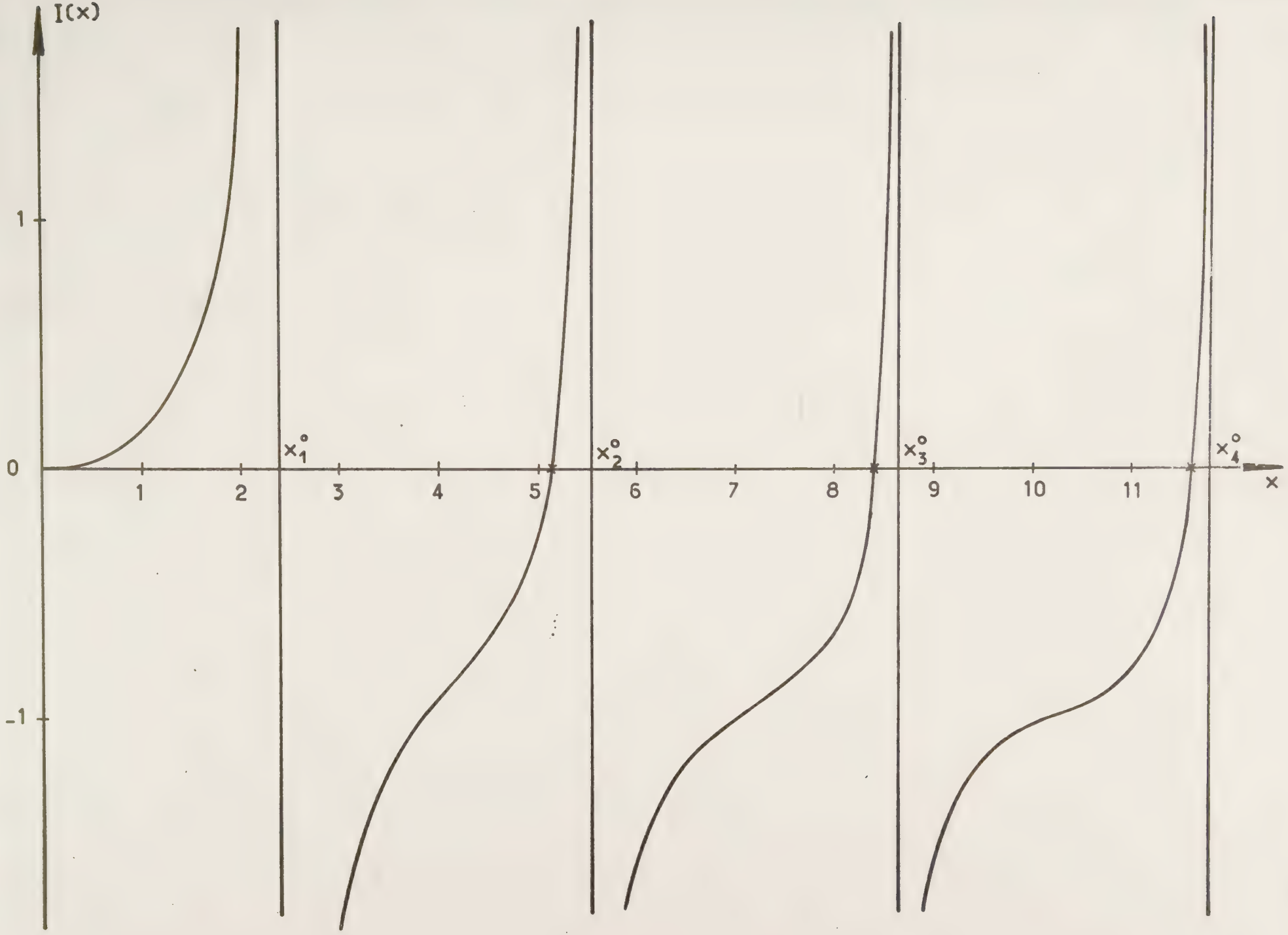
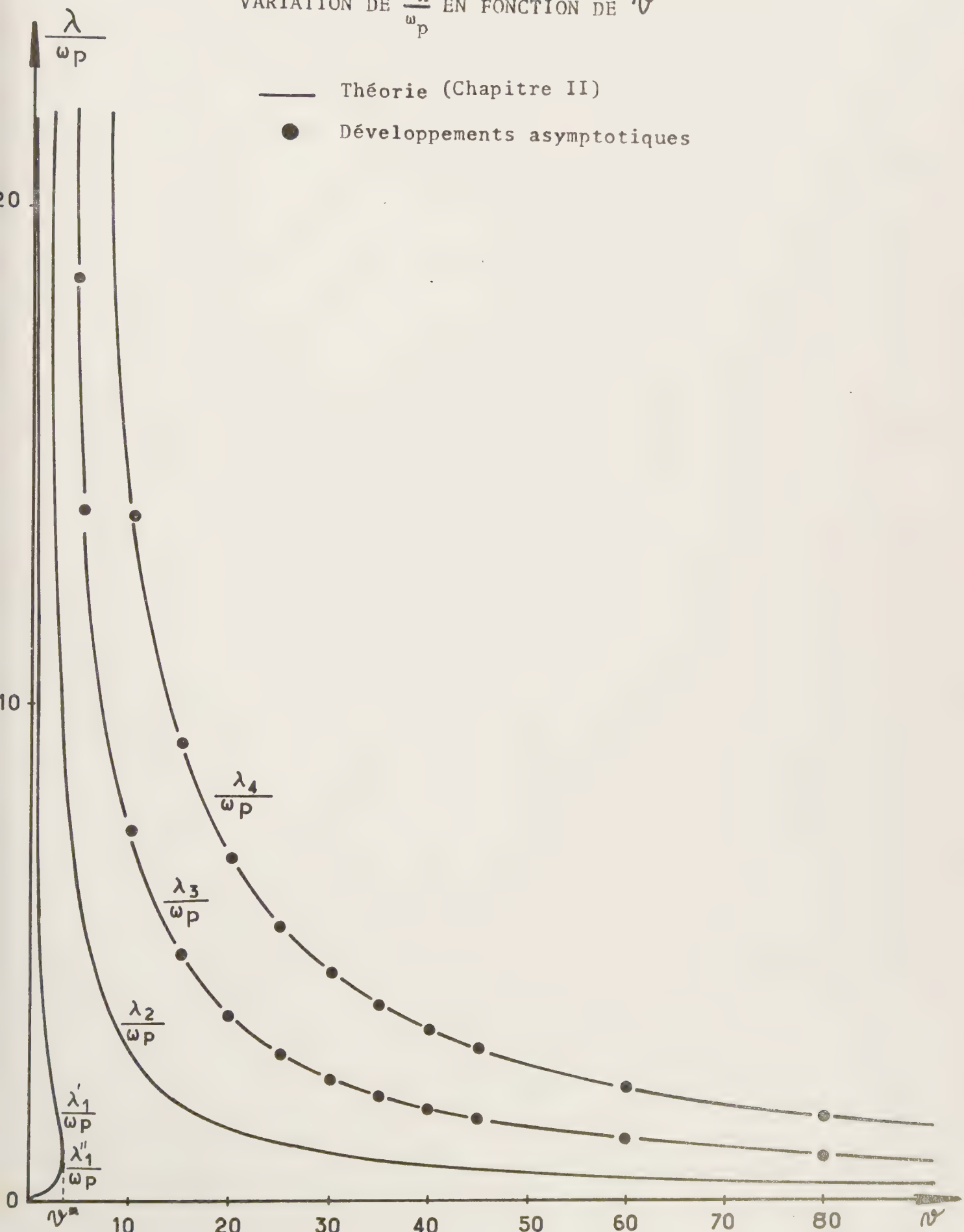


Fig. 1 Graphe de I(x)

Fig. 2

VARIATION DE $\frac{\lambda_n}{\omega_p}$ EN FONCTION DE ν



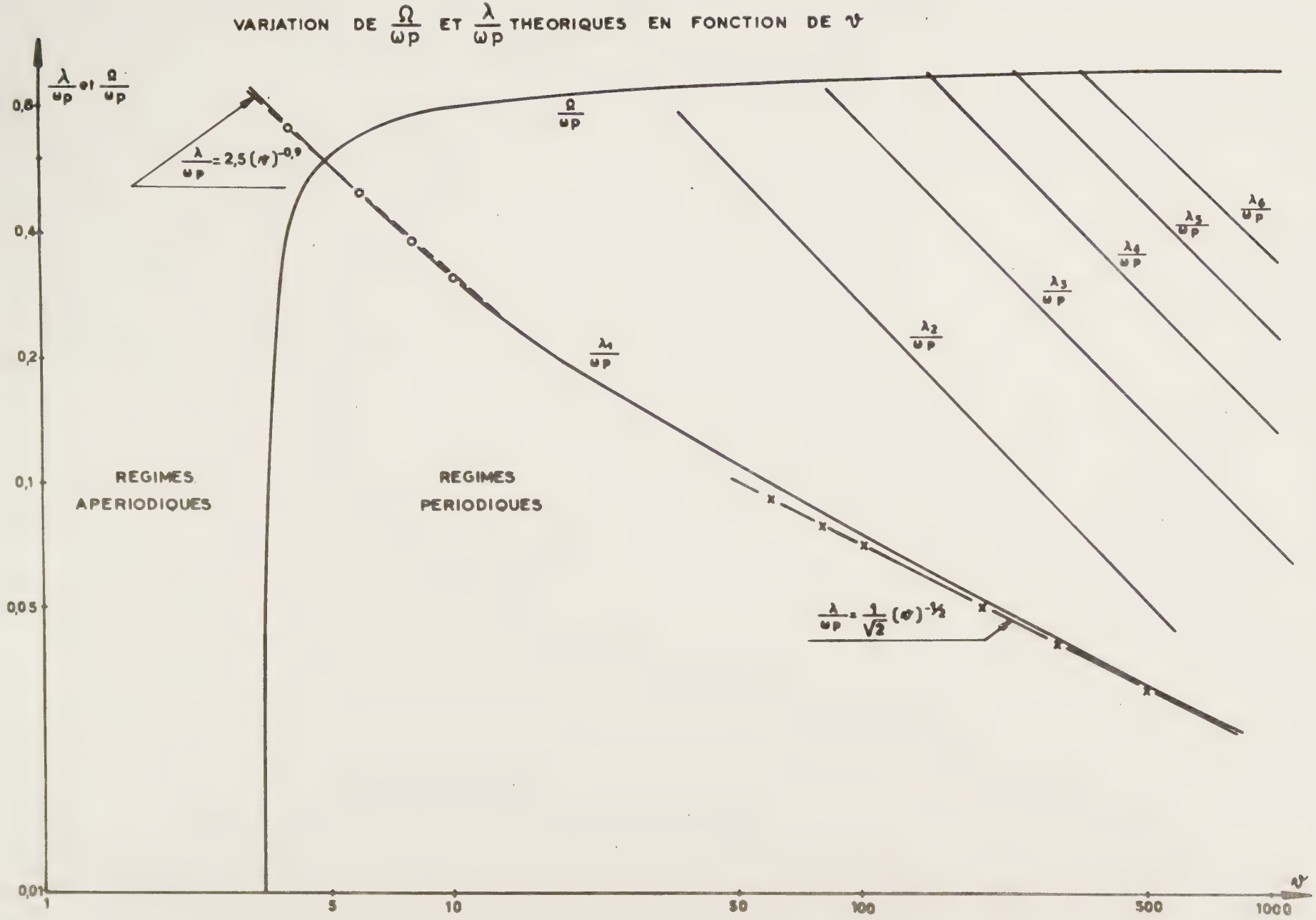

VARIATION DE $\frac{\Omega}{\omega p}$ ET $\frac{\lambda}{\omega p}$ THEORIQUES EN FONCTION DE ϑ
$\frac{\lambda}{\omega p}$ et $\frac{\Omega}{\omega p}$
0,8
0,4
0,2
0,1
0,05
0,01
$\frac{\lambda}{\omega p} = 2{,}5\,(\vartheta)^{-0{,}9}$
$\frac{\Omega}{\omega p}$
$\frac{\lambda_1}{\omega p}$
$\frac{\lambda_2}{\omega p}$
$\frac{\lambda_3}{\omega p}$
$\frac{\lambda_4}{\omega p}$
$\frac{\lambda_5}{\omega p}$
$\frac{\lambda_6}{\omega p}$
REGIMES APERIODIQUES
REGIMES PERIODIQUES
$\frac{\lambda}{\omega p} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\vartheta)^{-1/2}$
ϑ
1
5
10
50
100
500
1000

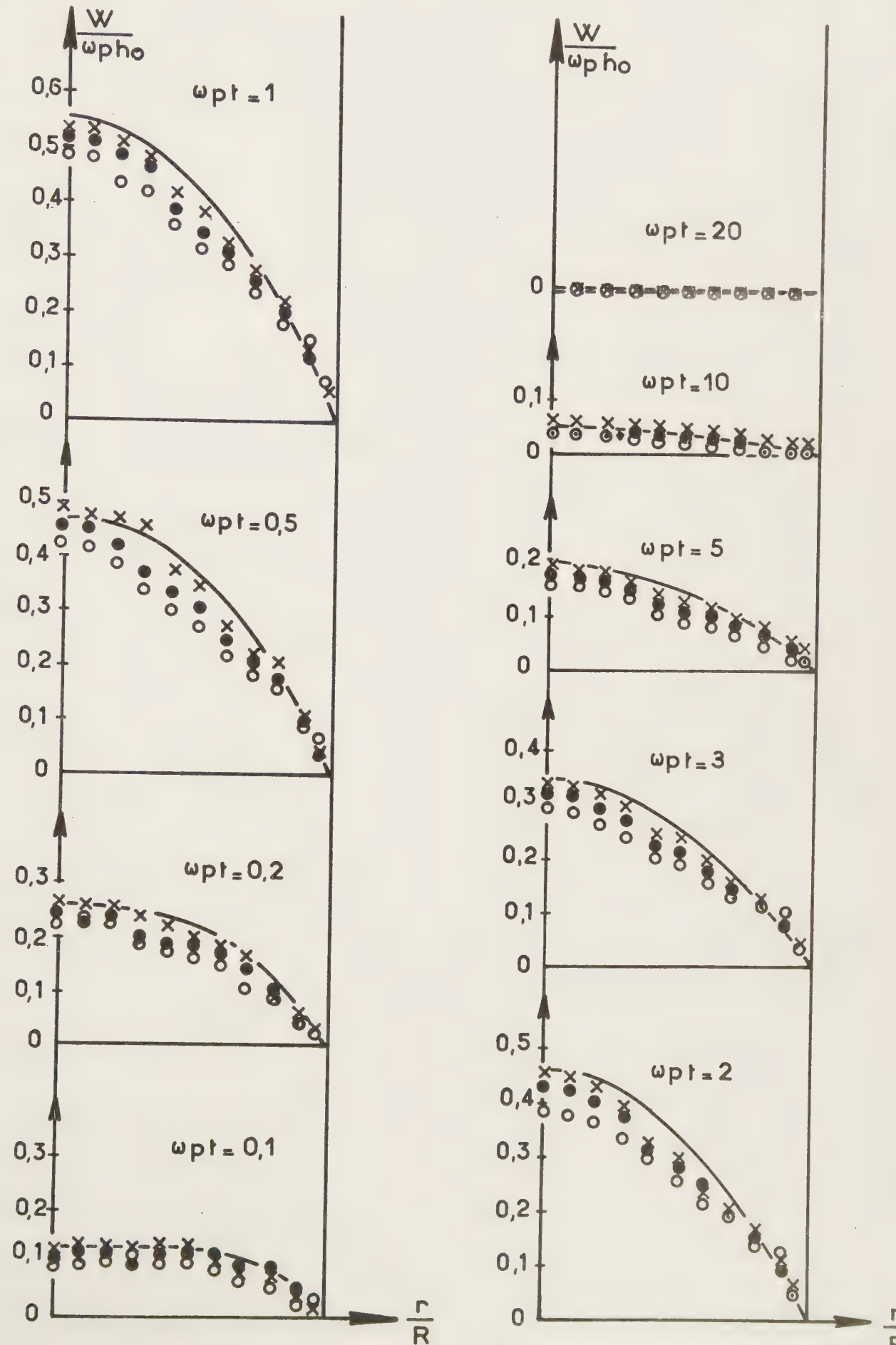
Fig. 3

Fig. 3 Bis

VARIATION DE $(1 - \frac{\Omega}{\omega_p})$ THEORIQUE EN FONCTION DE ν

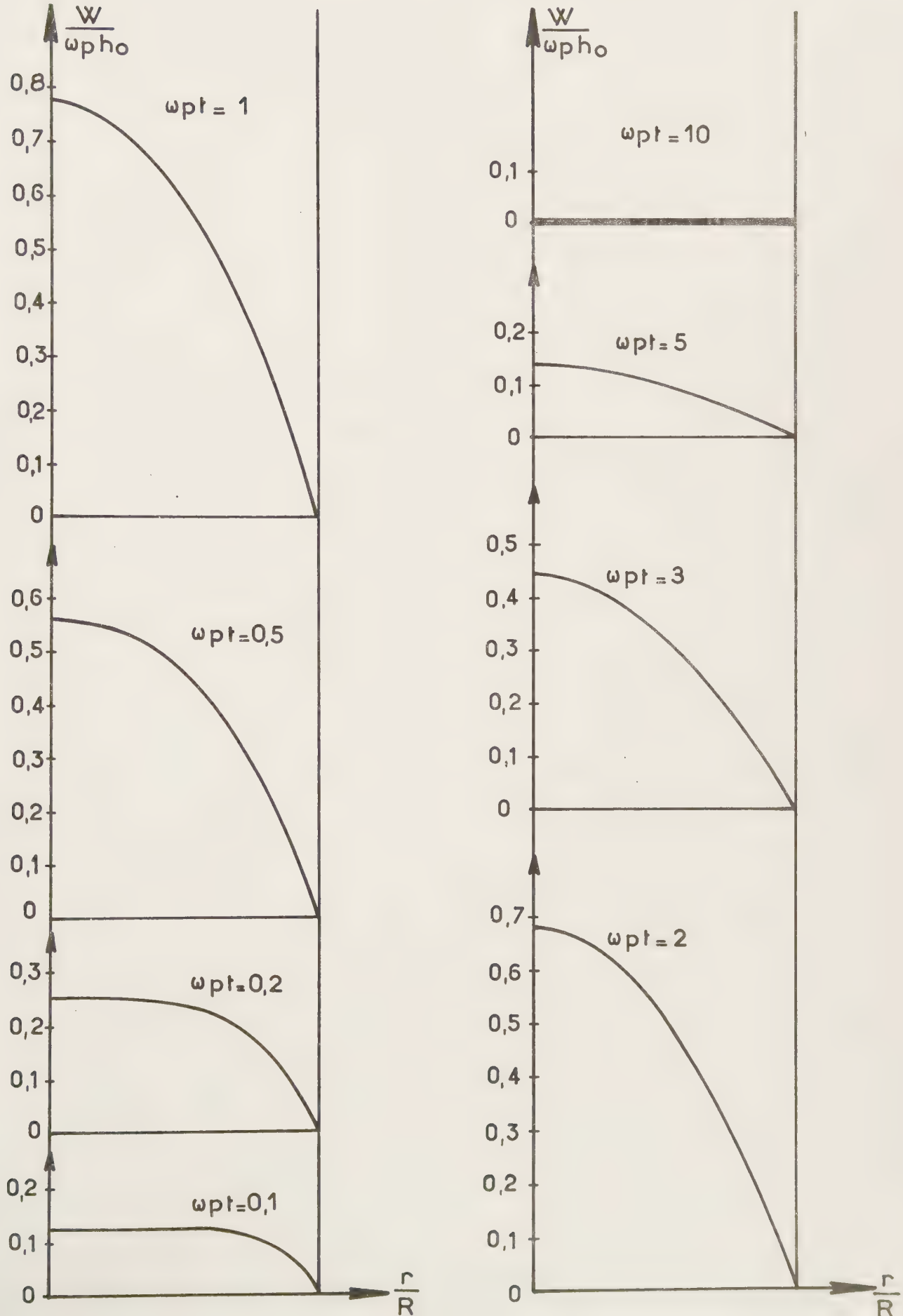
PROFILS DES VITESSES INSTANTANEES (ϑ = 2,04) Fig. 4

Théorie ——— Expérience (× $\frac{h_o}{R}$ = 4, ● $\frac{h_o}{R}$ = 10, ○ $\frac{h_o}{R}$ = 40)



PROFILS DES VITESSES INSTANTANEES (ϑ = 3,4)

Théorie ——



VARIATION DE LA VITESSE INSTANTANEE THEORIQUE
AU CENTRE DU TUBE EN FONCTION DE ν

($\Omega t = \frac{\pi}{2}$)

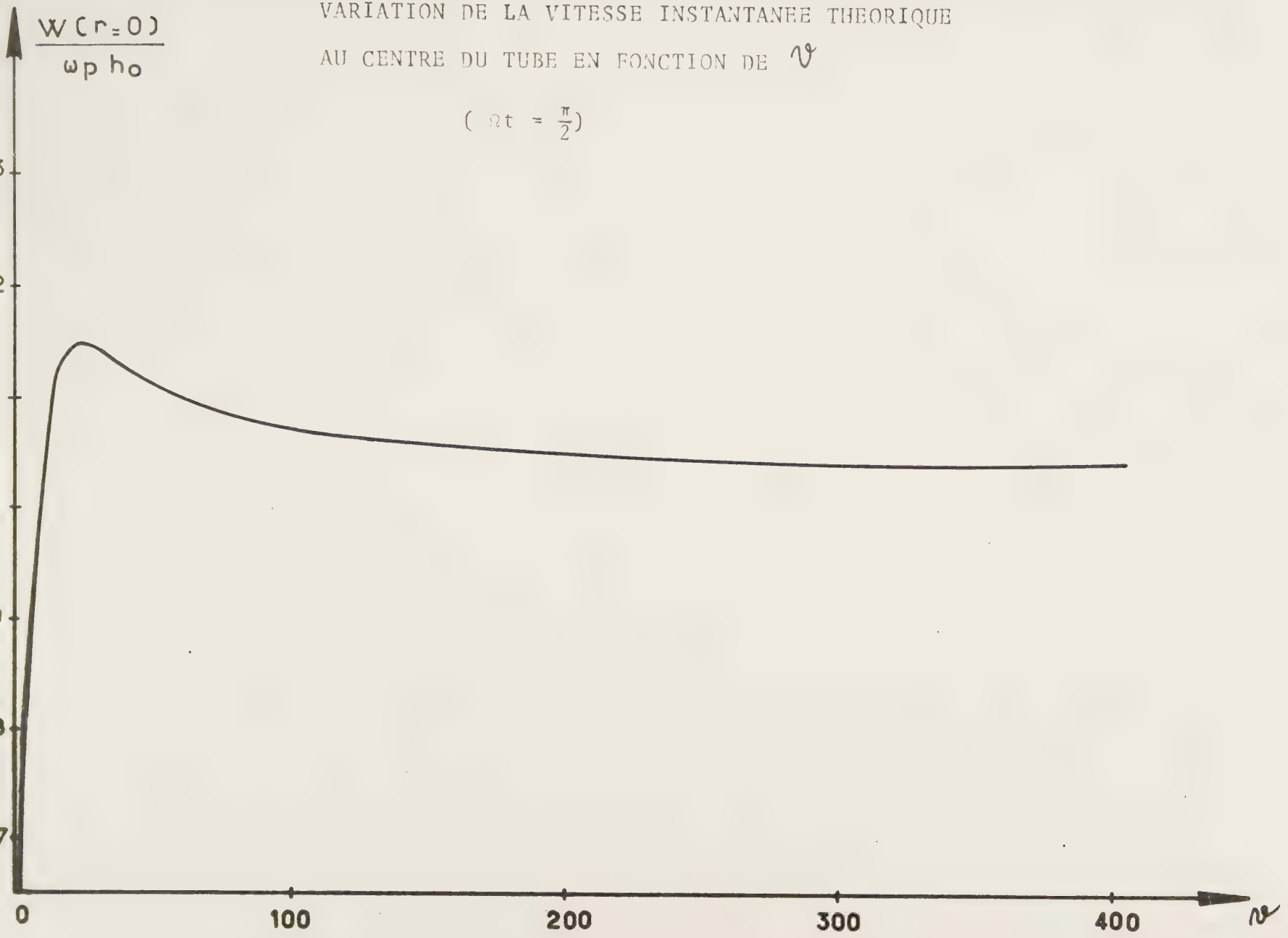
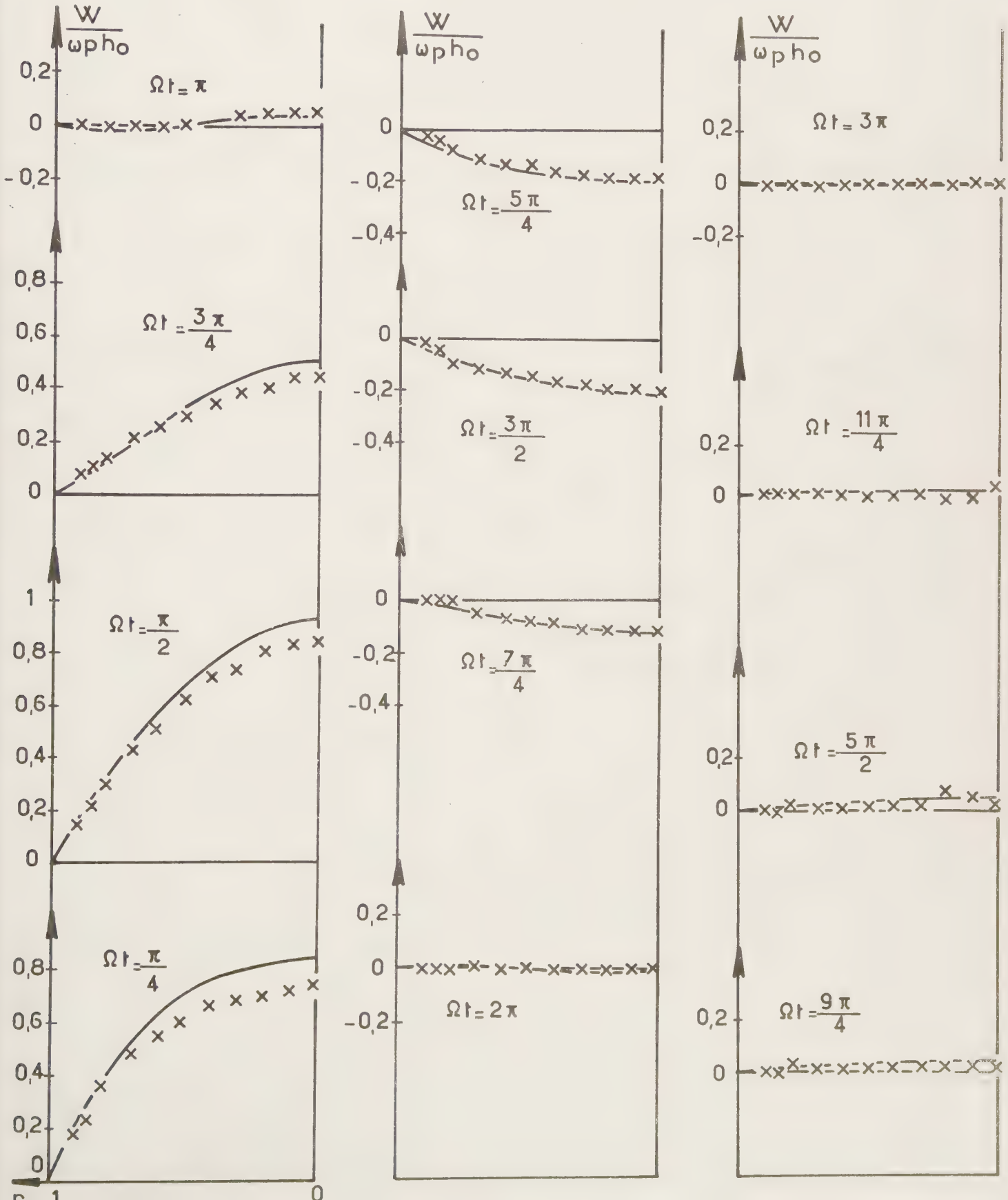


Fig. 6

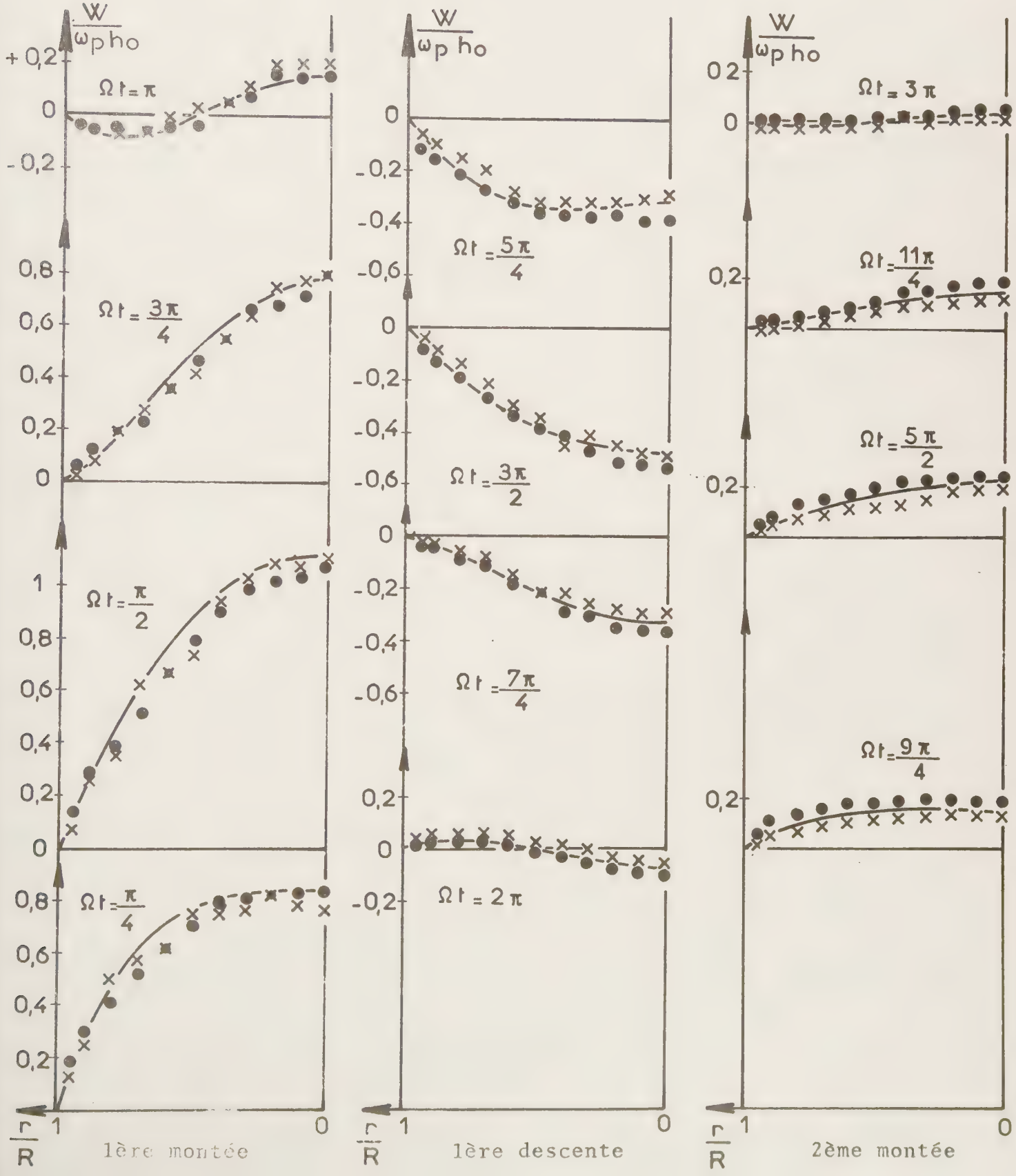
PROFILS DES VITESSES INSTANTANEES ($\mathcal{V}$ = 8,5)

Théorie ——— Expérience (× $\frac{h_o}{R}$ = 5)



PROFILS DES VITESSES INSTANTANEES ($\mathcal{V}$ = 15,3

Théorie ——— Expérience (● $\frac{h_o}{R}$ = 4, × $\frac{h_o}{R}$ = 50)



PROFILS DES VITESSES INSTANTANEES ($\vartheta = 28,5$)

Théorie ——— Expérience (● $\frac{h_o}{R} = 4$)

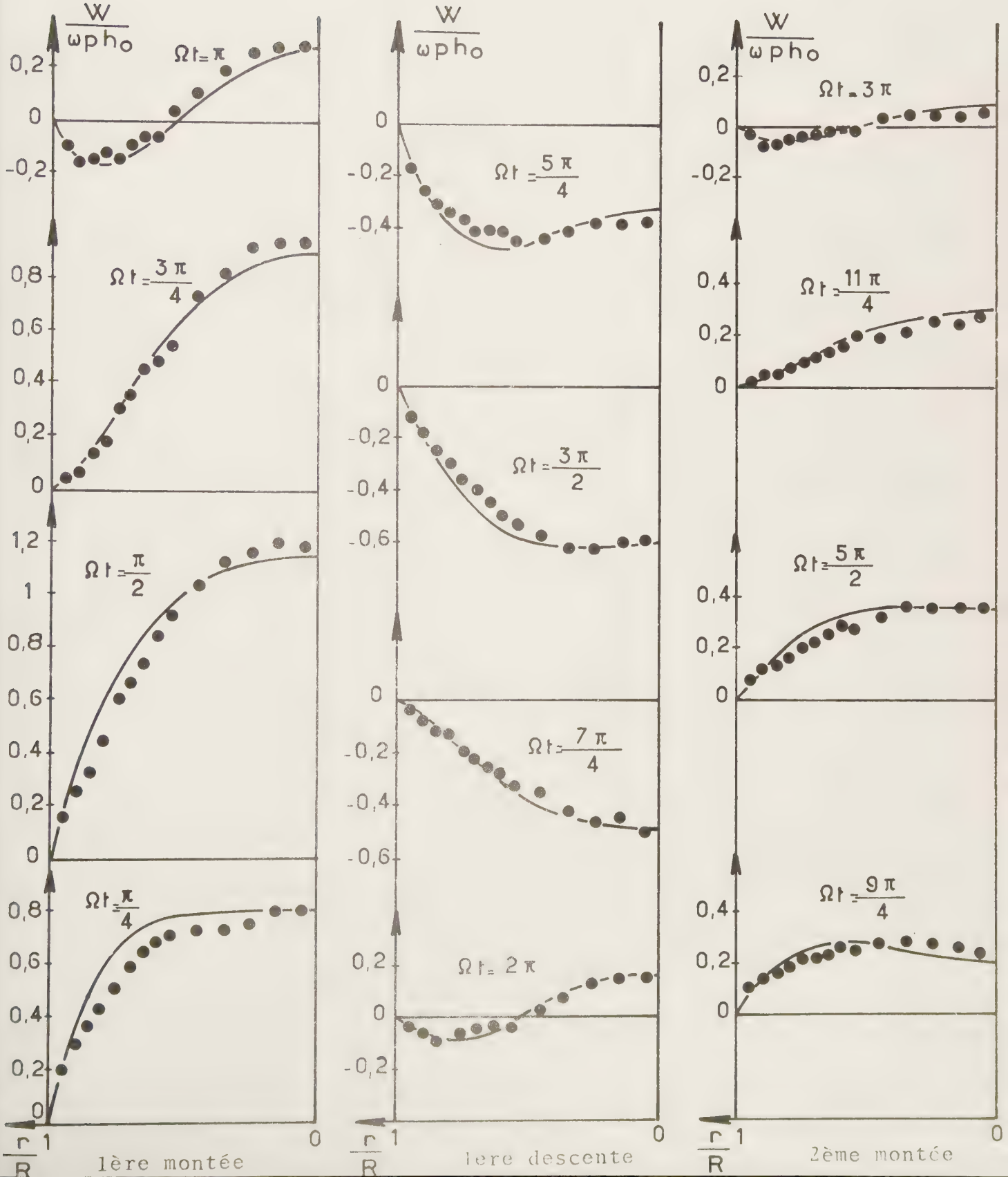
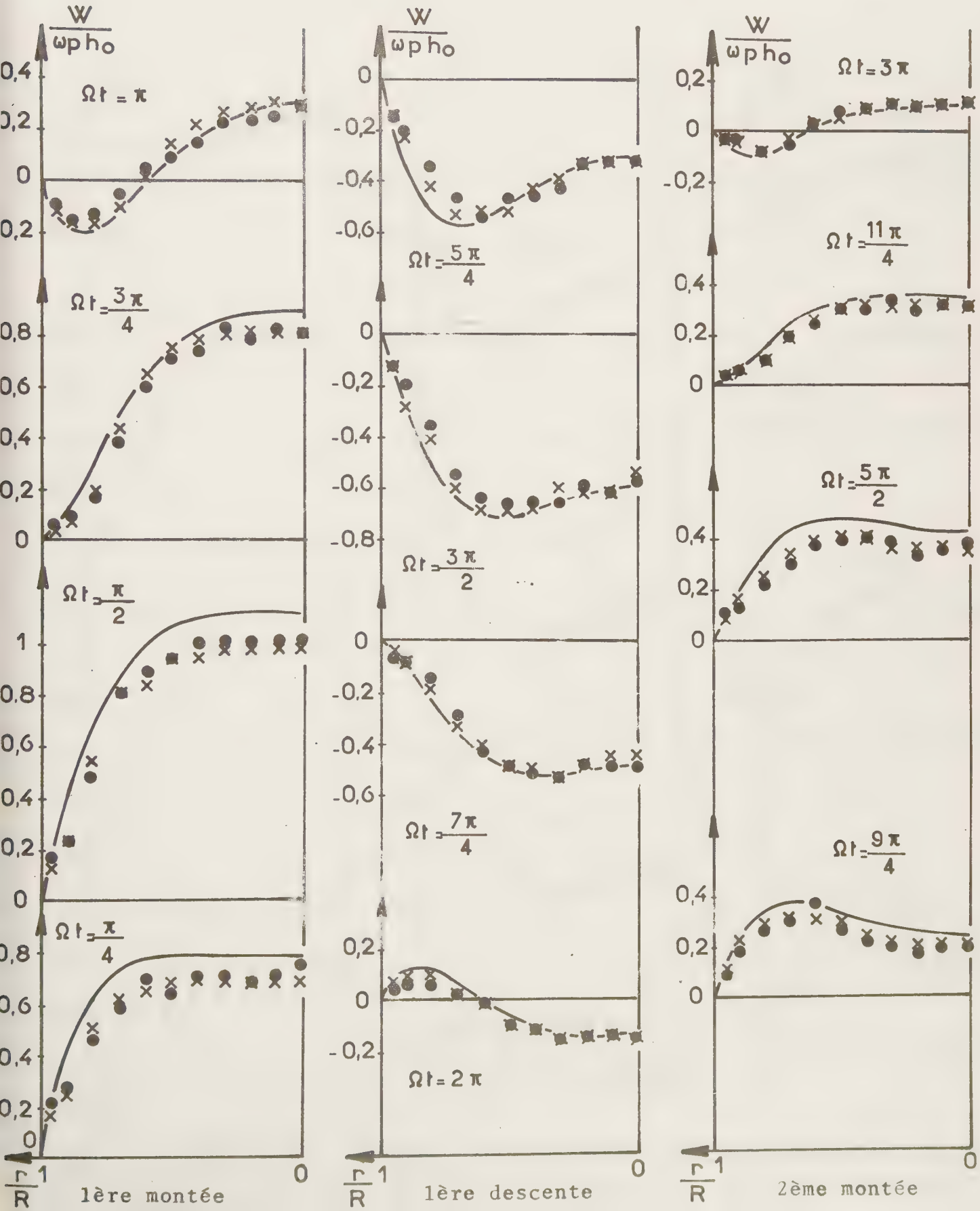


Fig. 10

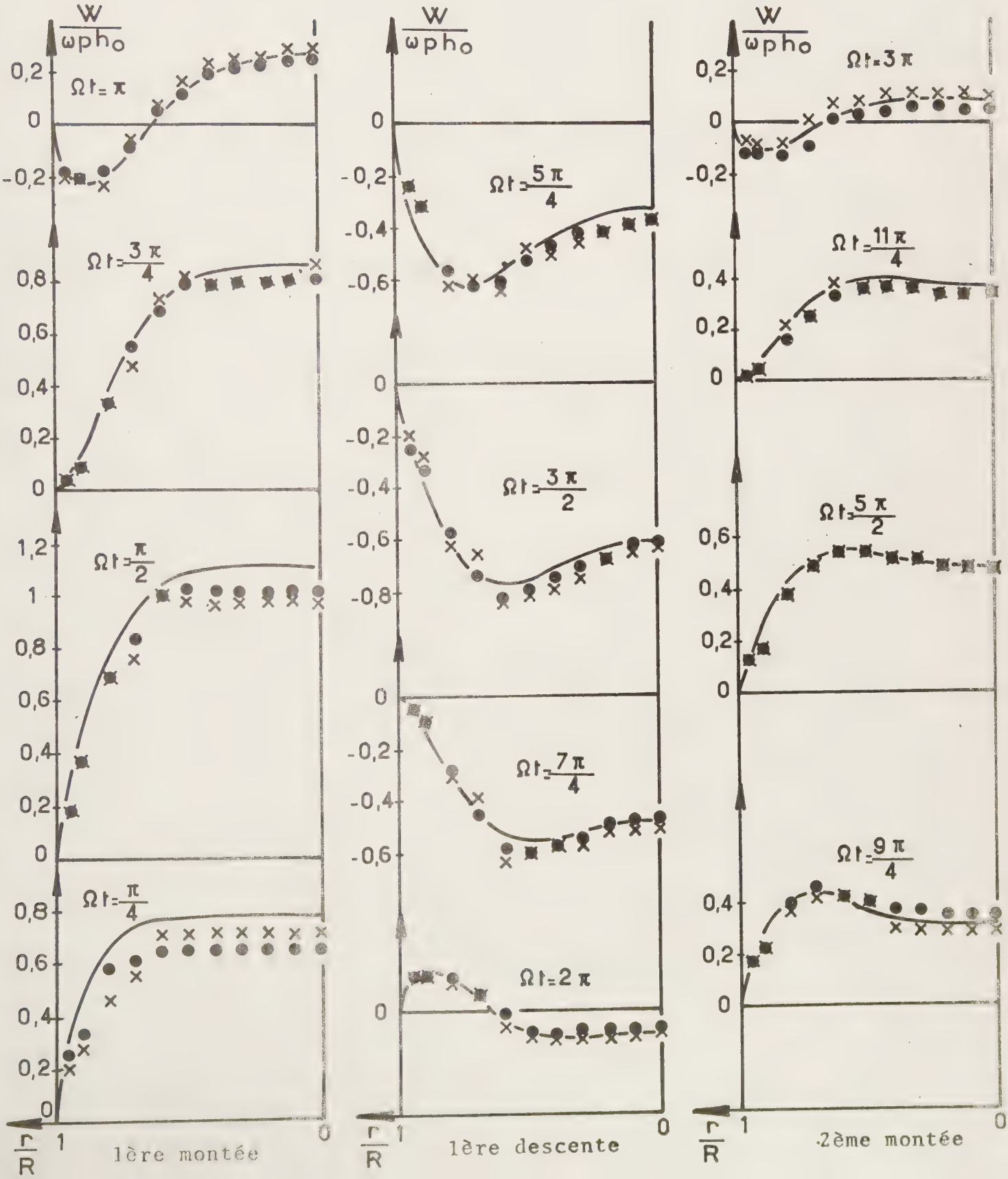
PROFILS DES VITESSES INSTANTANEES ($\mathcal{V}$ = 35,8)

Théorie ——— - Expérience (● $\frac{h_o}{R}$ = 4, × $\frac{h_o}{R}$ = 25)



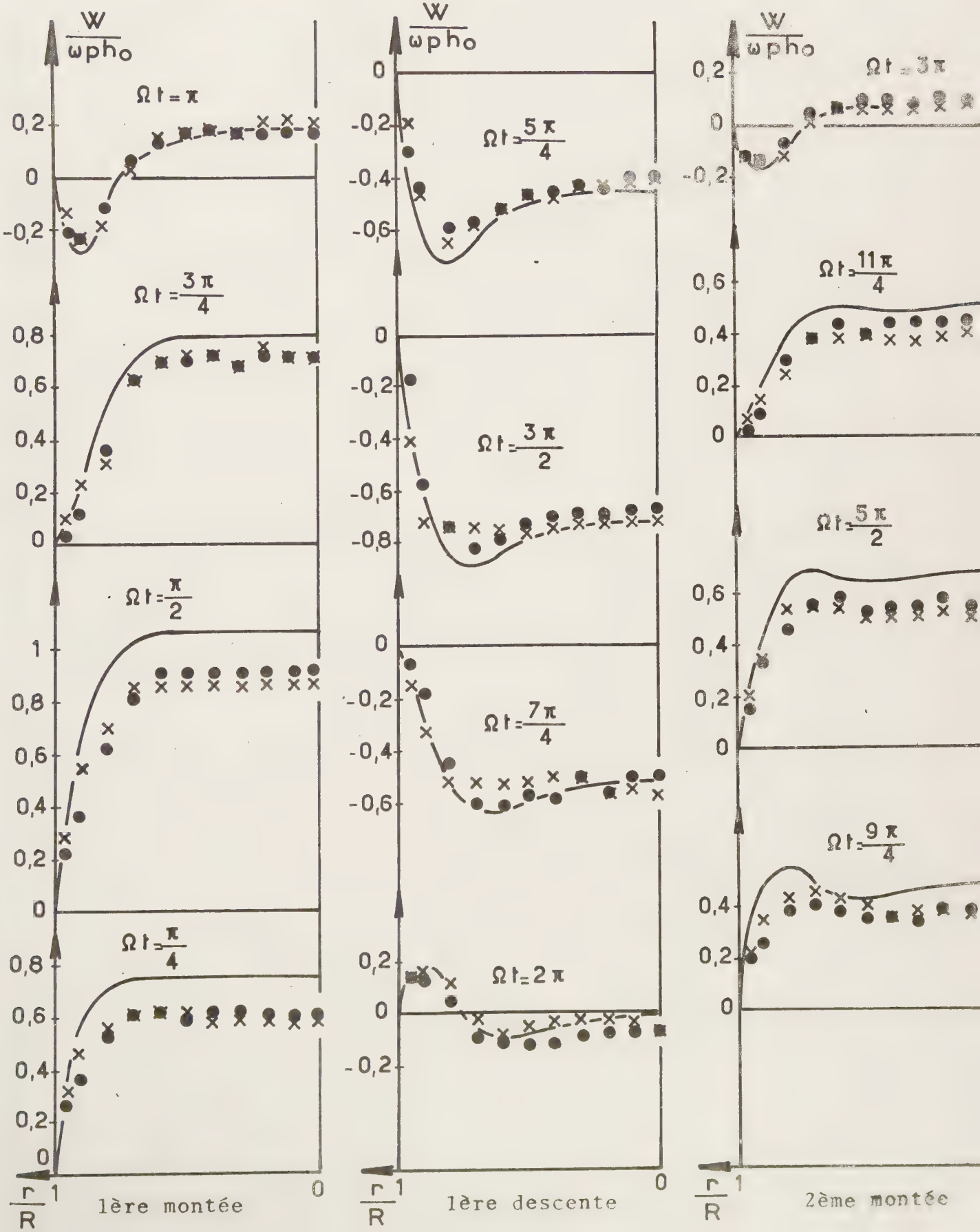
PROFILS DES VITESSES INSTANTANEES (ϑ = 62,2)

Théorie —— Expérience (● $\frac{h_o}{R}$ = 10, × $\frac{h_o}{R}$ = 25)



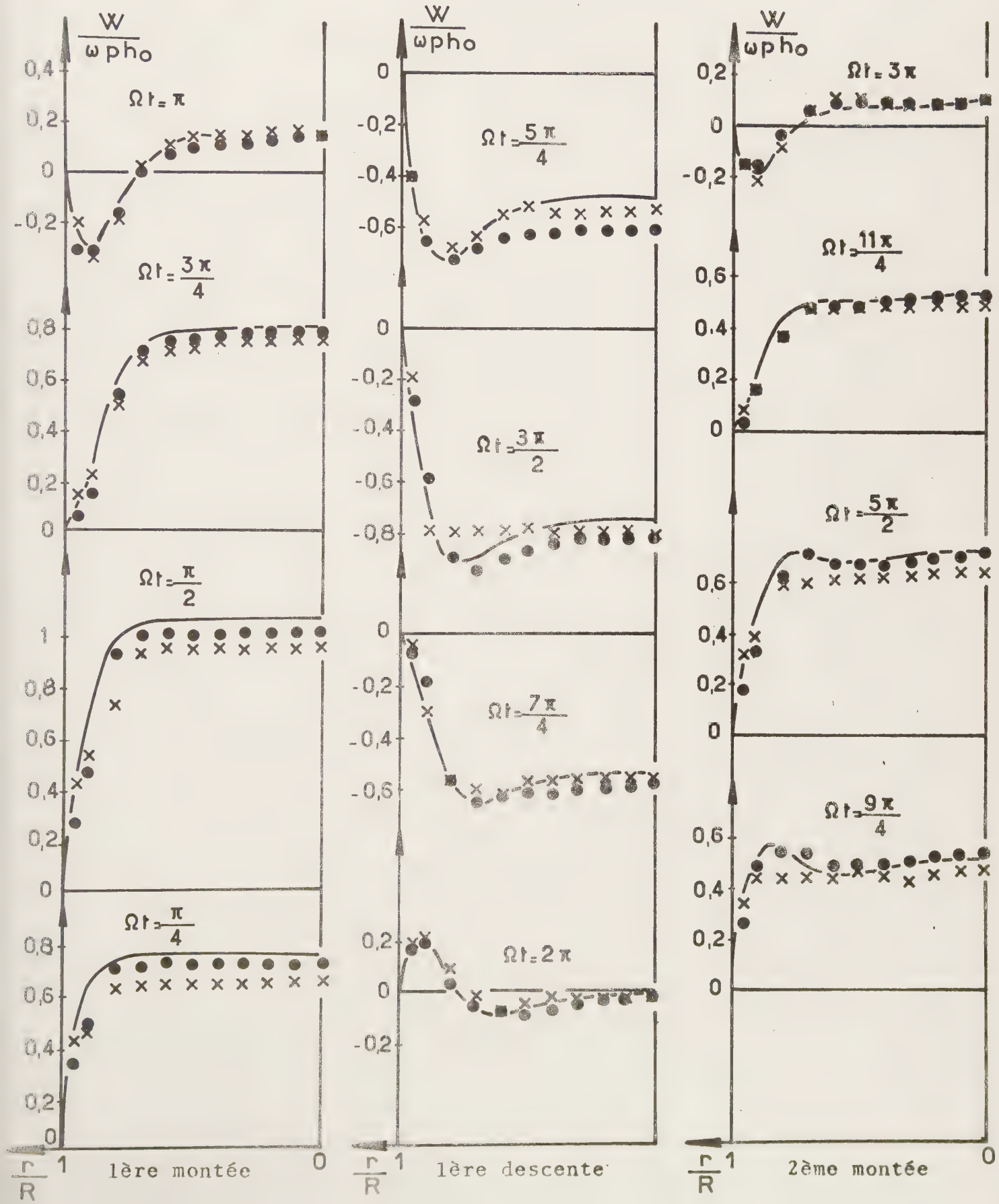
PROFILS DES VITESSES INSTANTANEES ($\mathcal{V}$ = 138)

Théorie —— Expérience (● $\frac{h_o}{R}$ = 4 , × $\frac{h_o}{R}$ = 25)



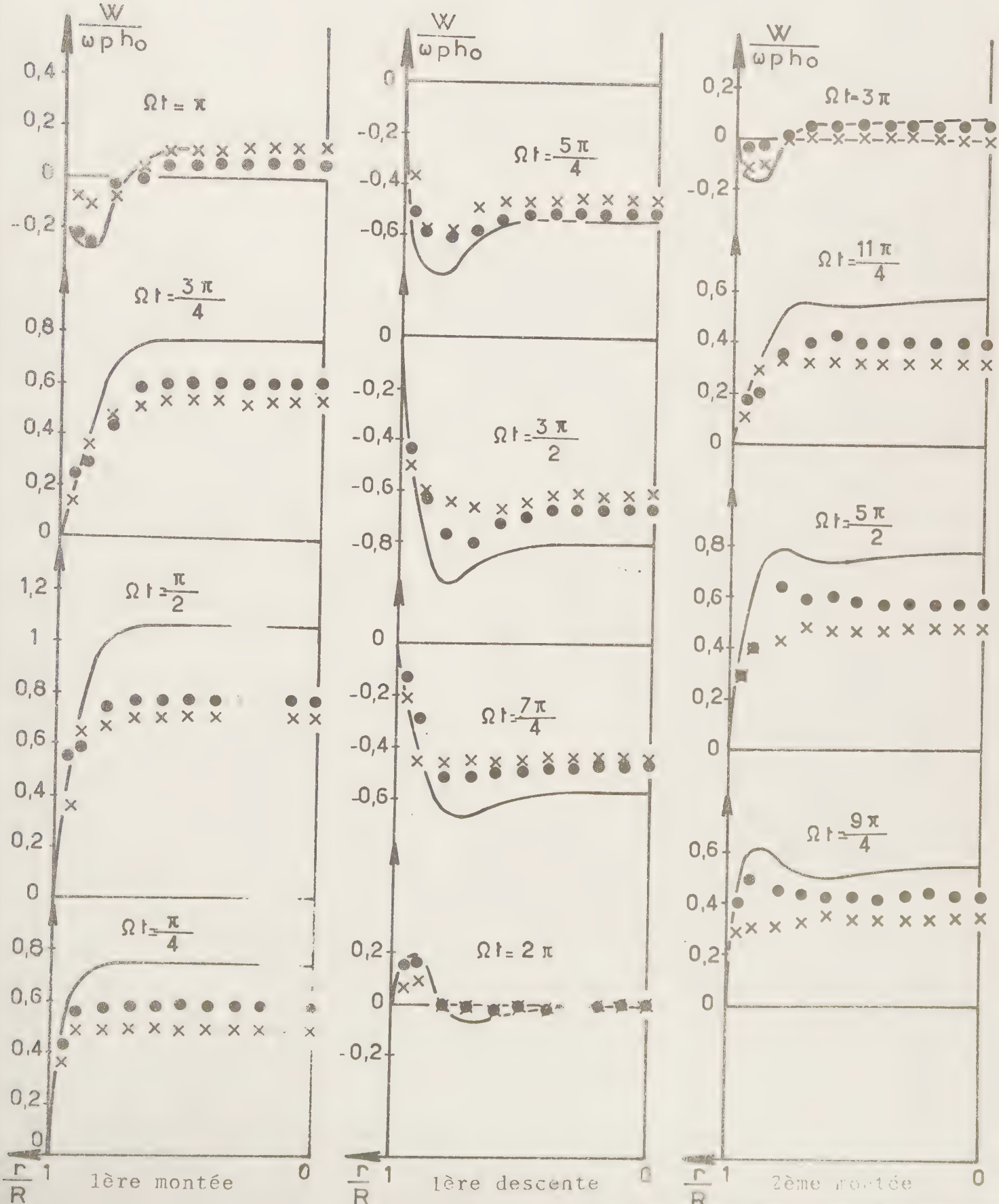
PROFILS DES VITESSES INSTANTANEES ($\mathcal{V} = 177$)

Théorie ——— Expérience (● $\frac{h_o}{R} = 4$, × $\frac{h_o}{R} = 25$)



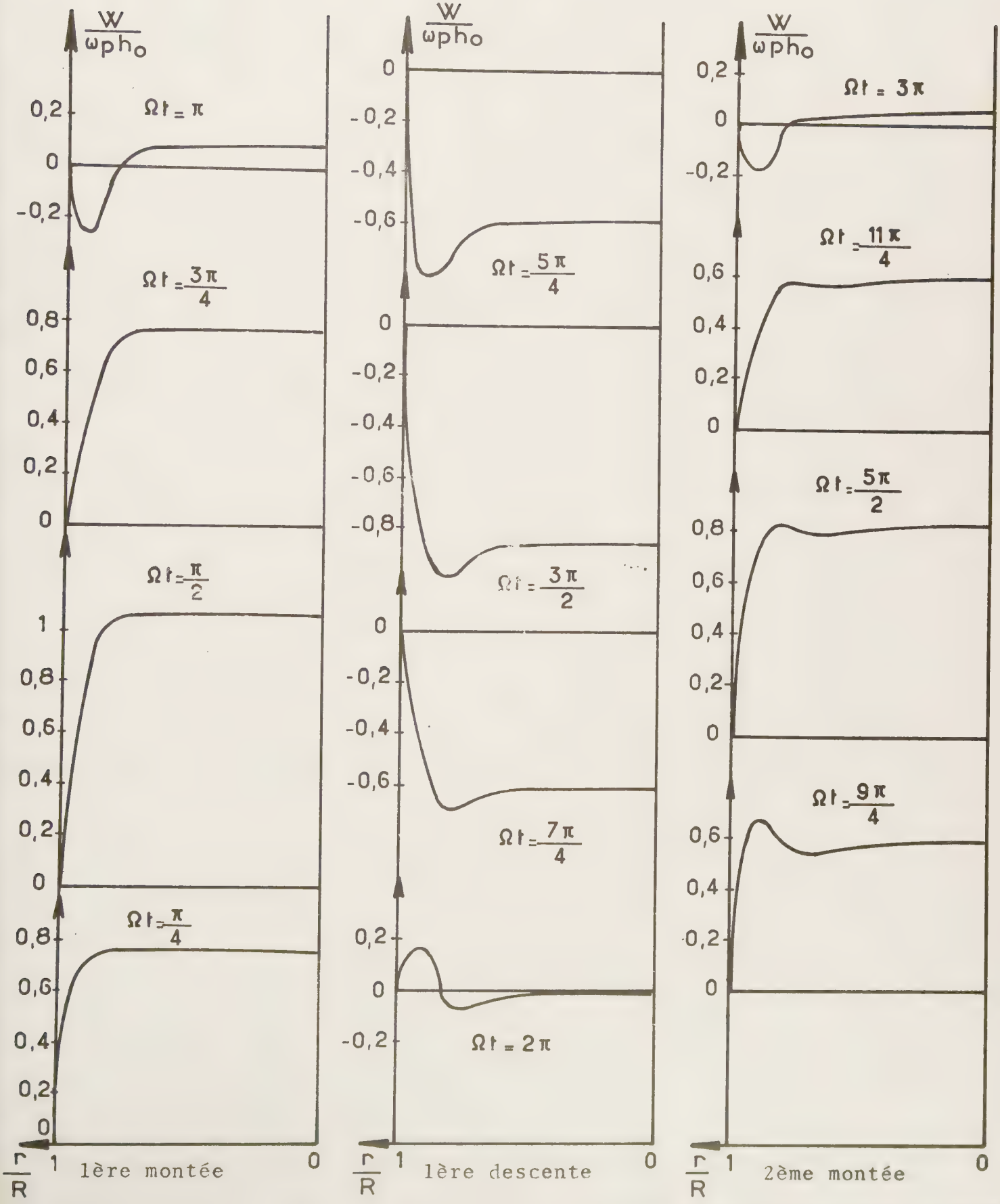
PROFILS DES VITESSES INSTANTANEES (ϑ = 260)

Théorie ——— Expérience (● $\frac{h_o}{R}$ = 4, × $\frac{h_o}{R}$ = 25)



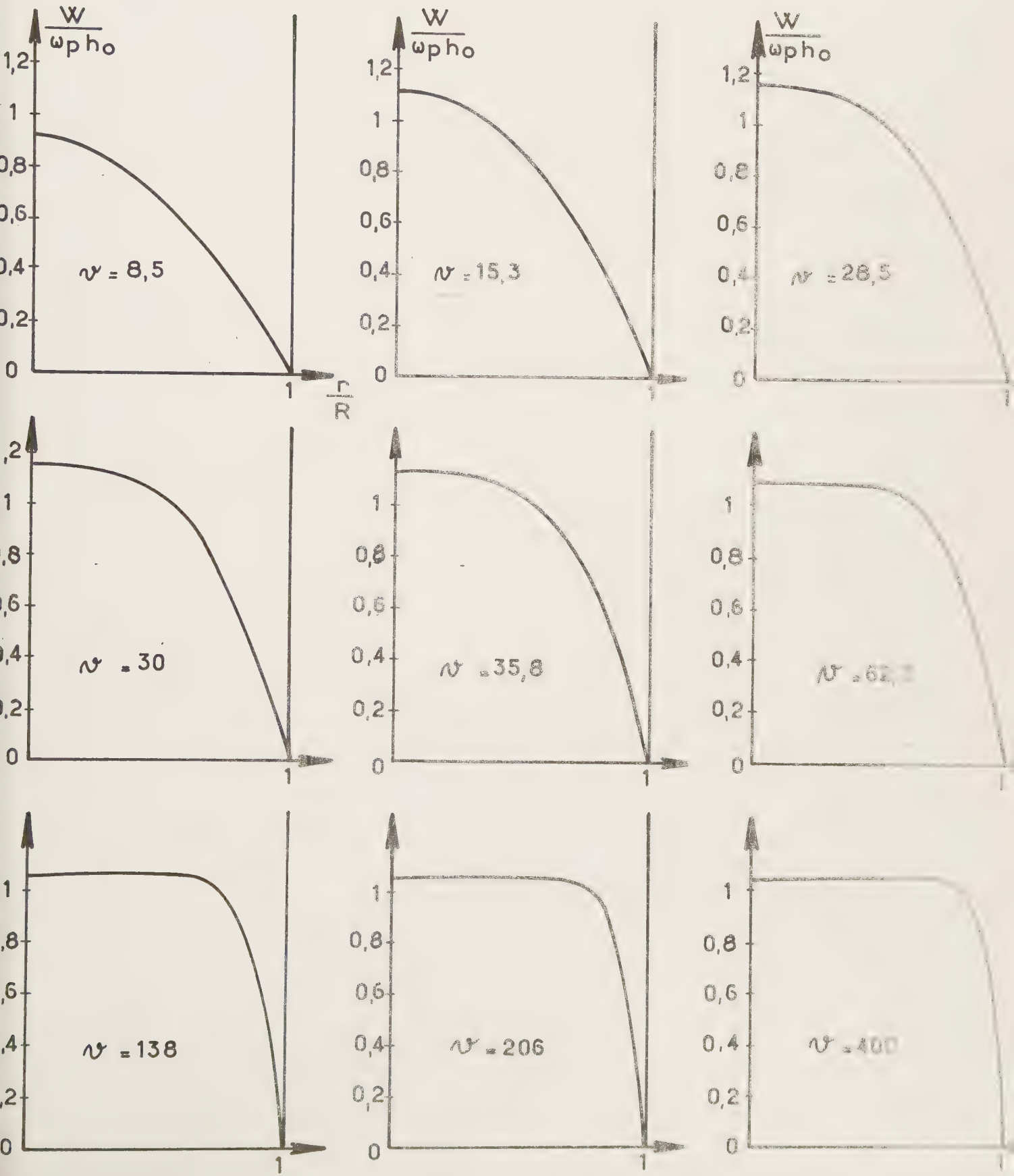
PROFILS DES VITESSES INSTANTANEES

ν = 400 Théorie ——



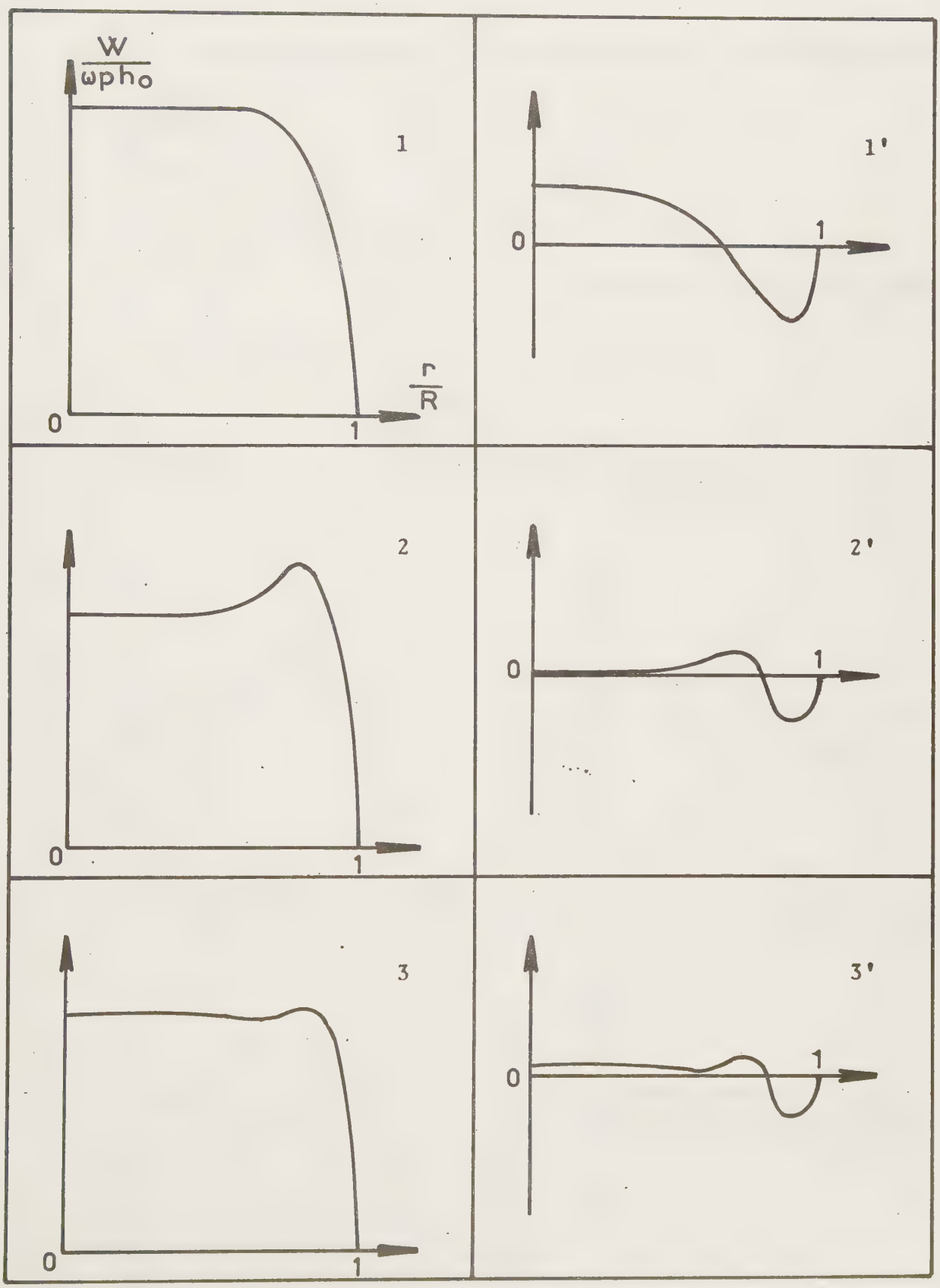
PROFILS DES VITESSES INSTANTANEES THEORIQUES

($\Omega t = \frac{\pi}{2}$)



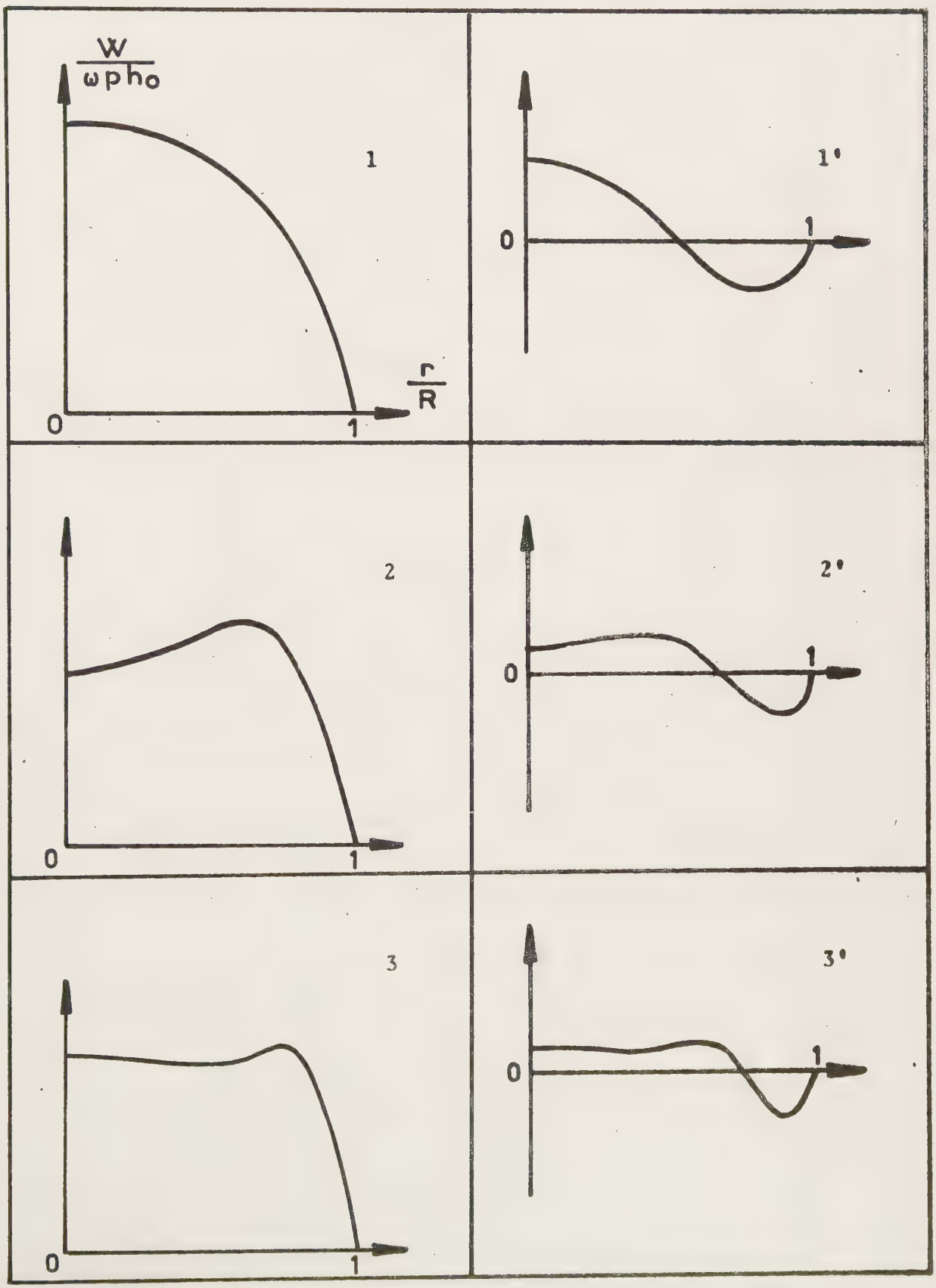
PROFILS DES VITESSES INSTANTANEES

TYPE "COUCHE LIMITE"



PROFILS DES VITESSES INSTANTANEES

TYPE "PLEINEMENT DEVELOPPE"



VARIATION DE $\frac{\delta}{R}$ THEORIQUE EN FONCTION DE Ωt

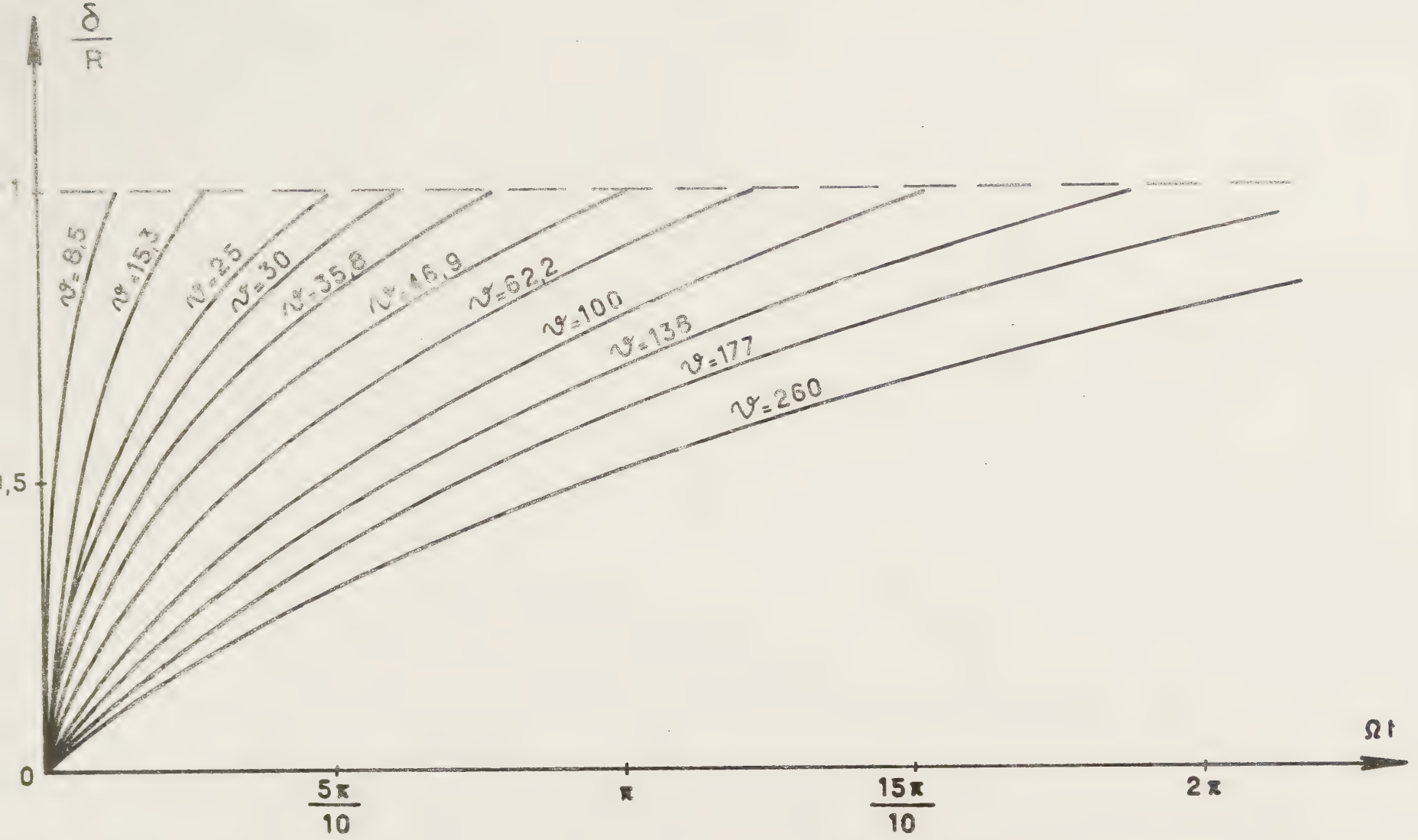
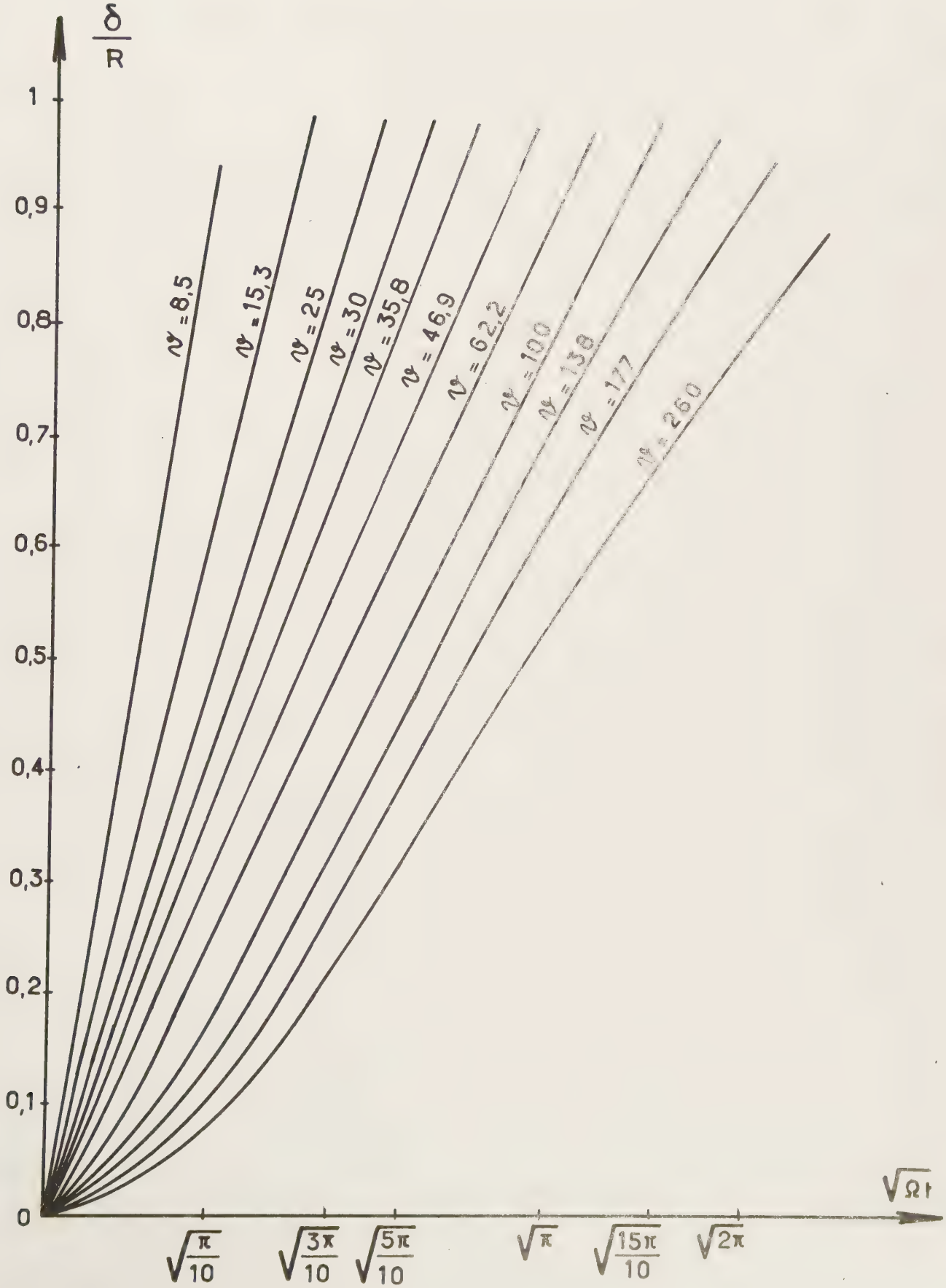


Fig. 19

VARIATION DE $\frac{\delta}{R}$ THEORIQUE EN FONCTION DE $\sqrt{\Omega t}$



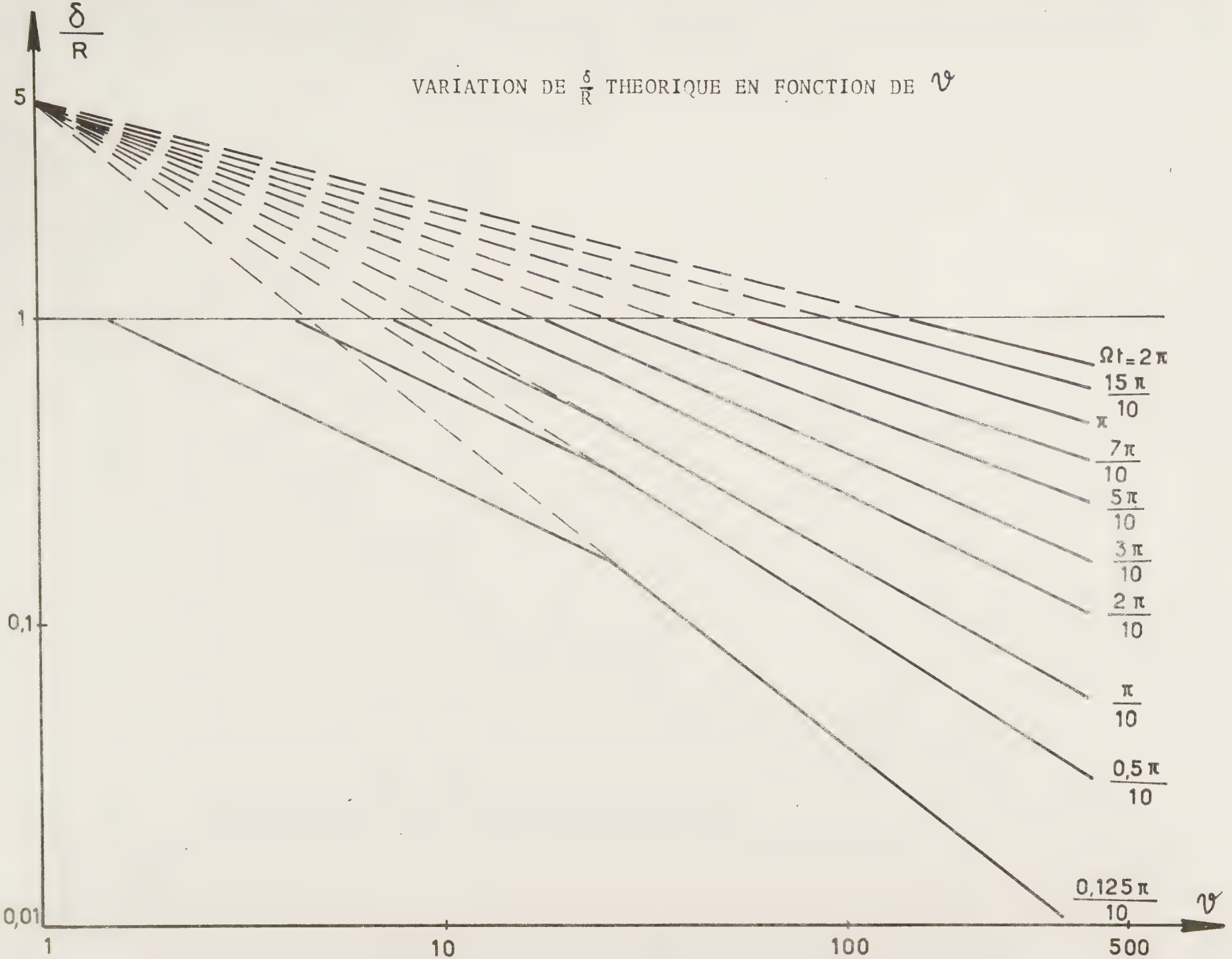
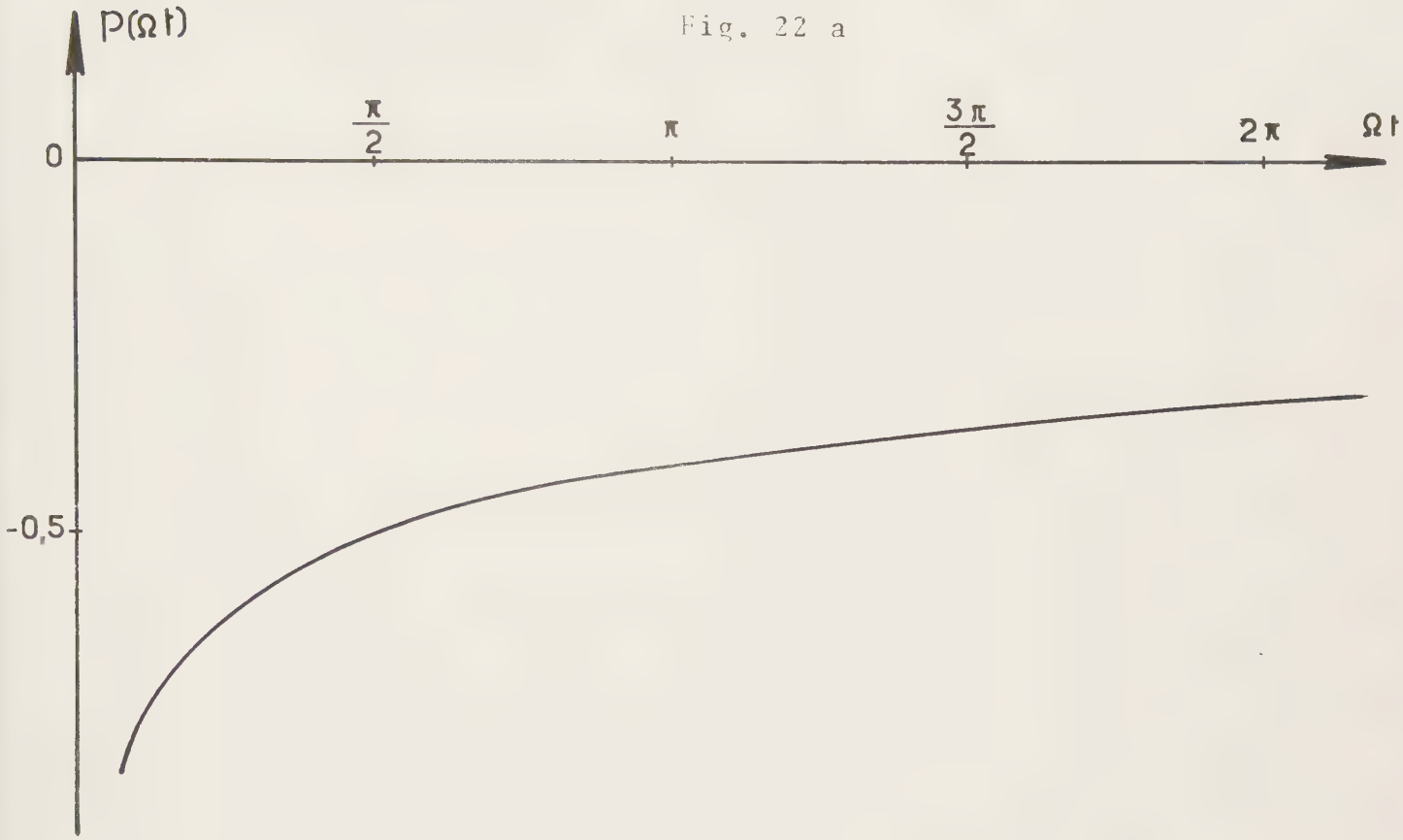

δ/R
VARIATION DE δ/R THEORIQUE EN FONCTION DE ν
5
1
0,1
0,01
1
10
100
500
ν
Ωt = 2π
15π/10
π
7π/10
5π/10
3π/10
2π/10
π/10
0,5π/10
0,125π/10

Fig. 21

VARIATION DE p(Ωt) EN FONCTION DE Ωt

Fig. 22 a



VARIATION DE p(Ωt) EN FONCTION DE $\sqrt{\Omega t}$

Fig. 22 b

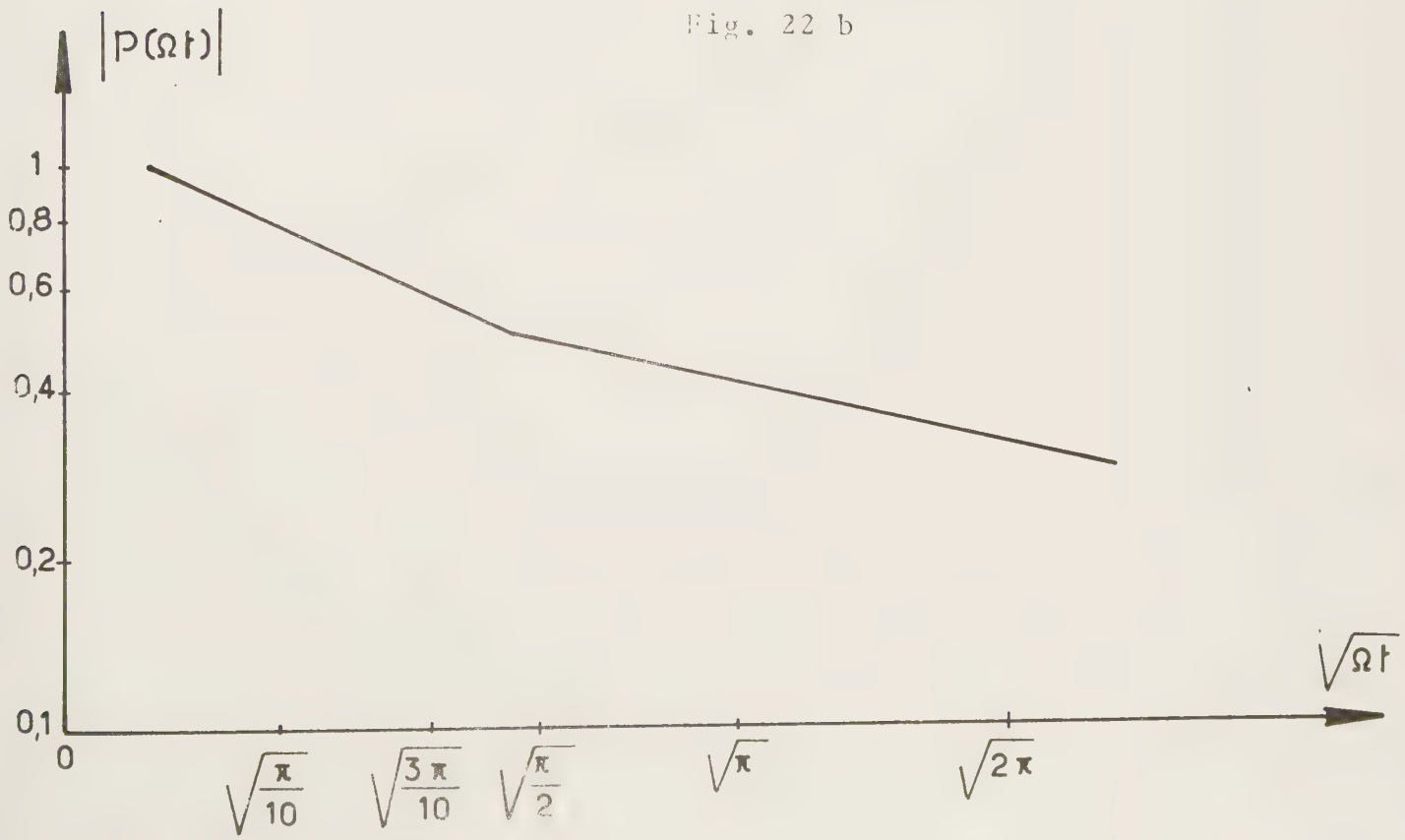


Fig. 23

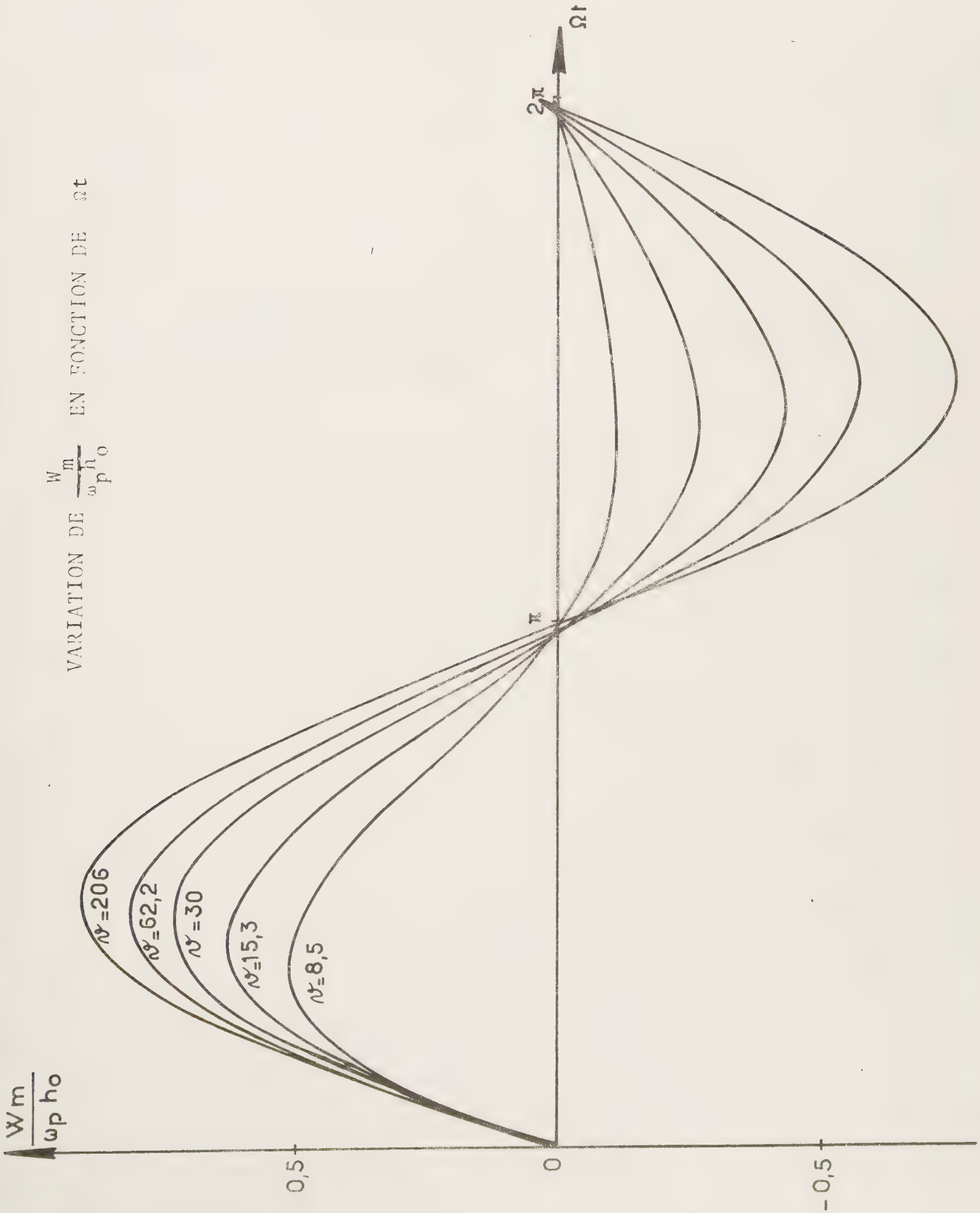

VARIATION DE $\frac{W_m}{\omega_p h_o}$ EN FONCTION DE Ωt
$\frac{W_m}{\omega_p h_o}$
0,5
0
-0,5
π
2π
Ωt
$\mathcal{N}$=206
$\mathcal{N}$=62,2
$\mathcal{N}$=30
$\mathcal{N}$=15,3
$\mathcal{N}$=8,5

Fig. 24

VARIATION DE η EN FONCTION DE $\frac{r}{R}$

$\vartheta = 15,3$

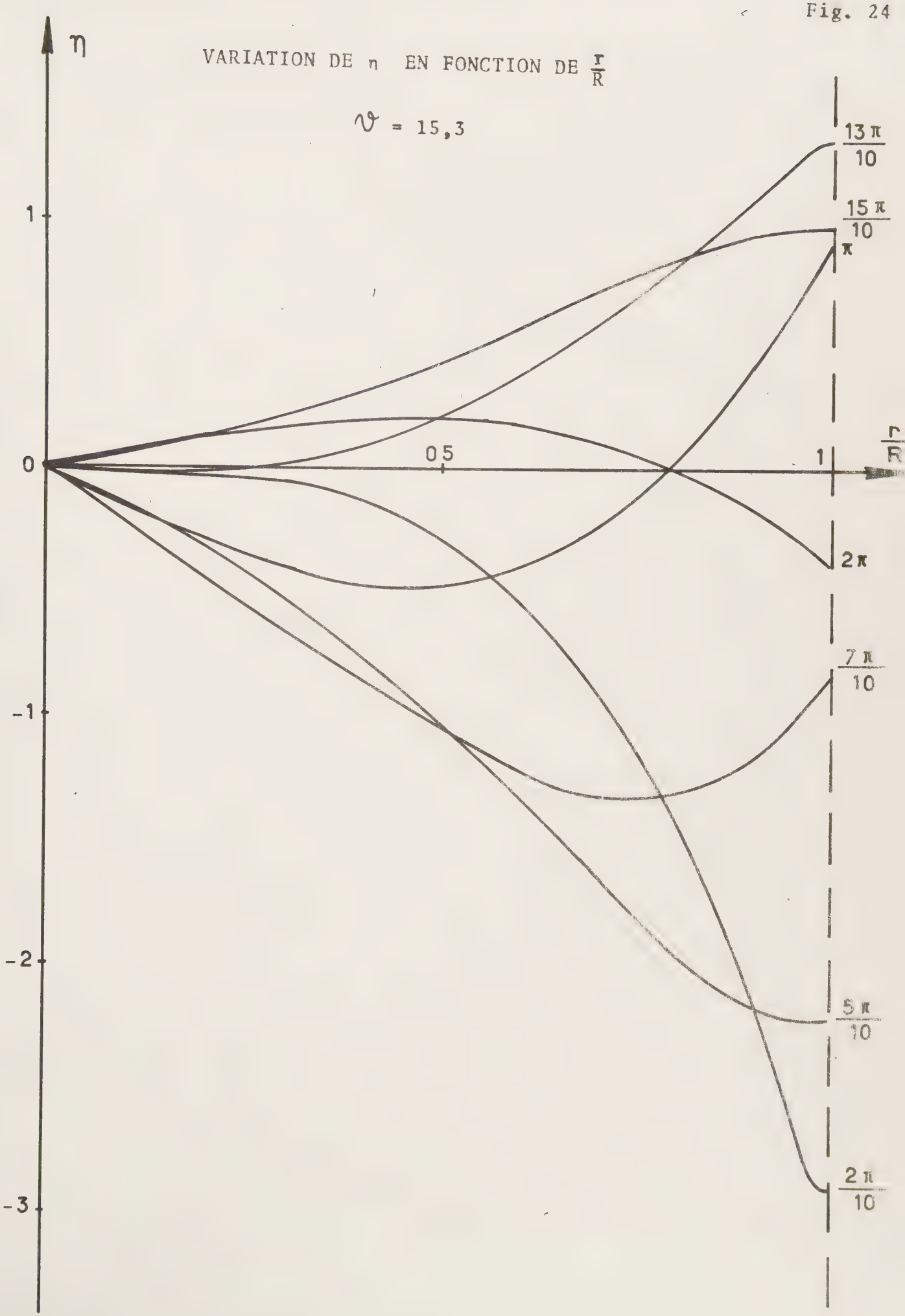
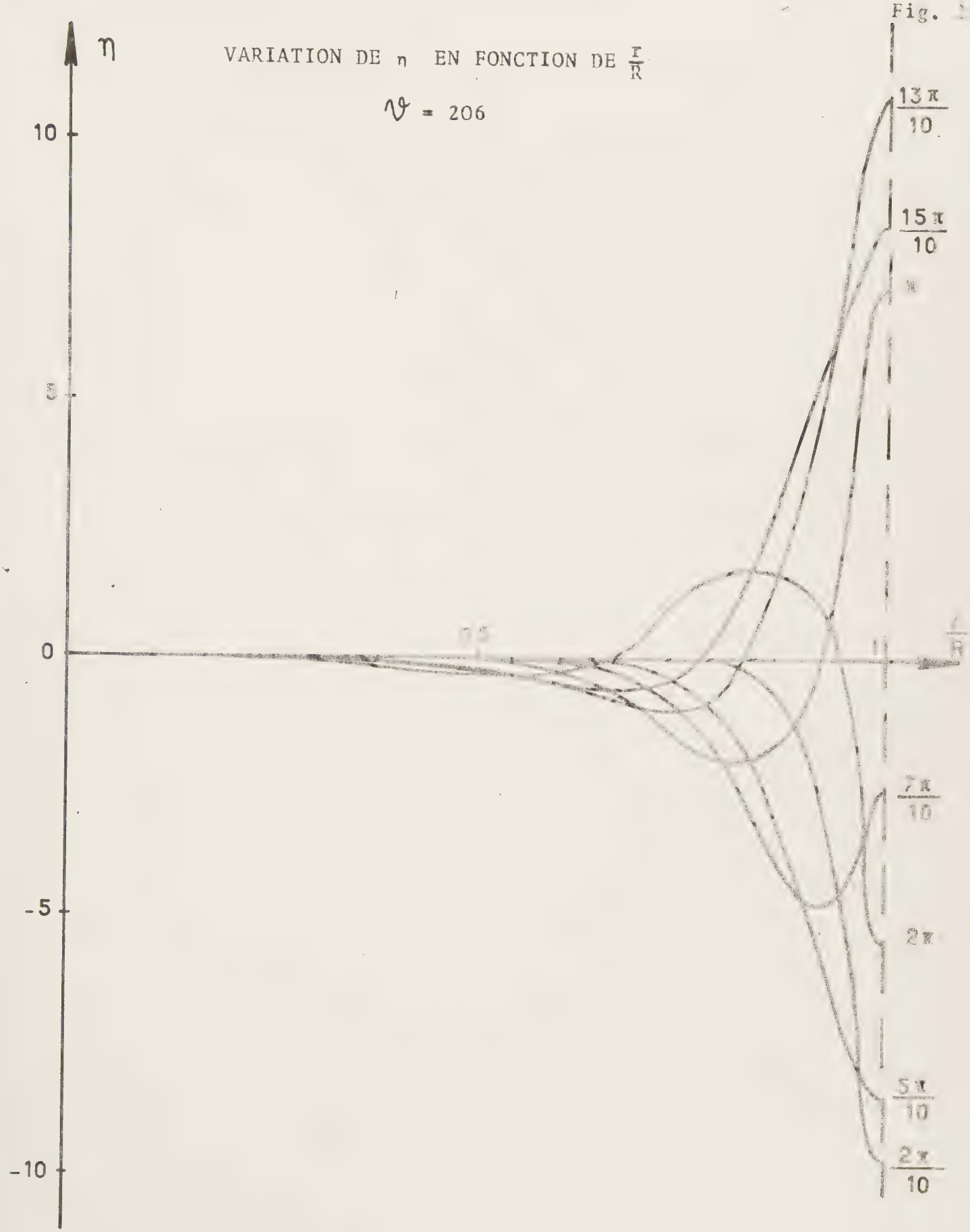


Fig. 15

VARIATION DE η EN FONCTION DE $\frac{r}{R}$

$\vartheta = 206$



REPARTITION DANS LA SECTION DES ZEROS DE η

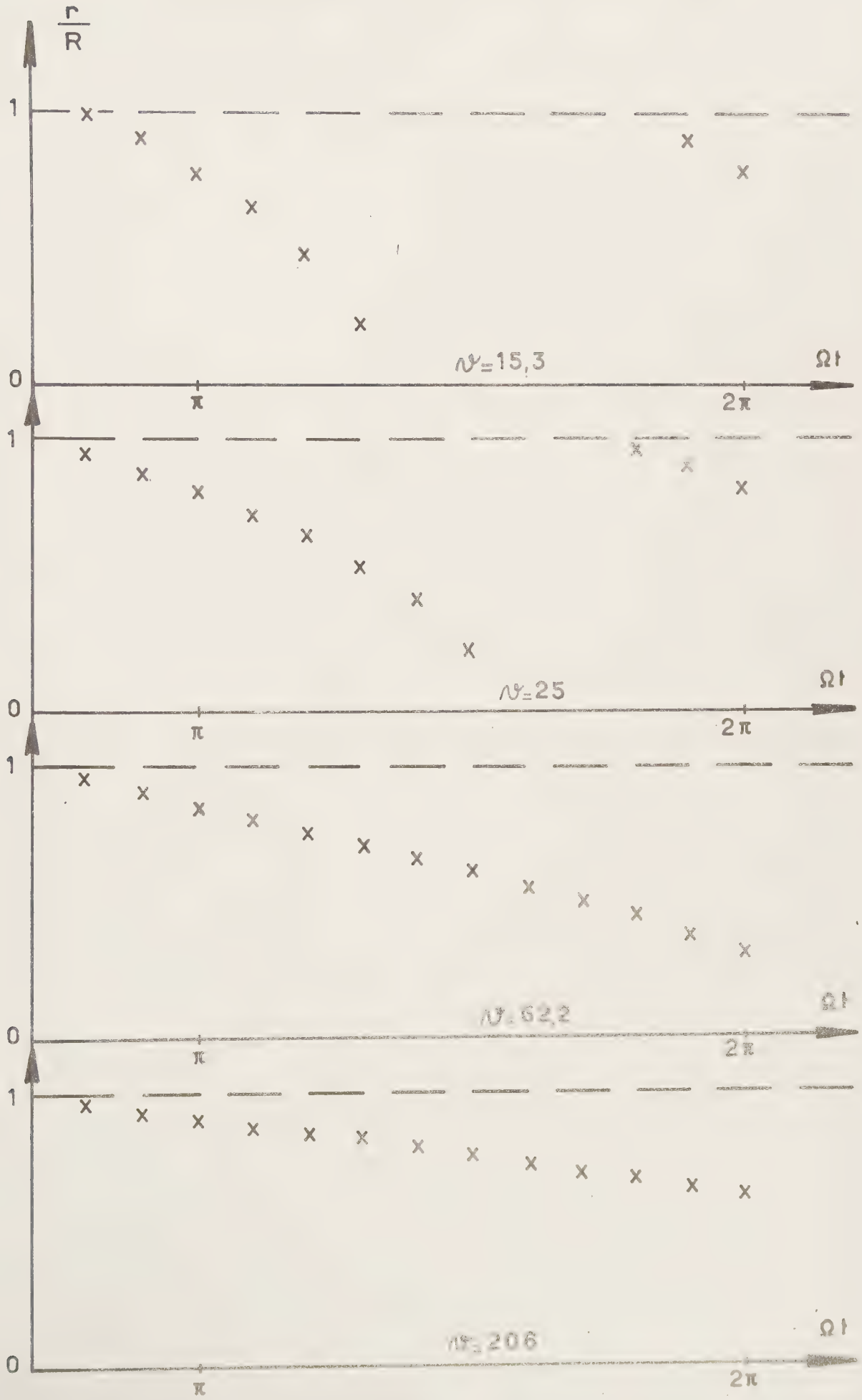
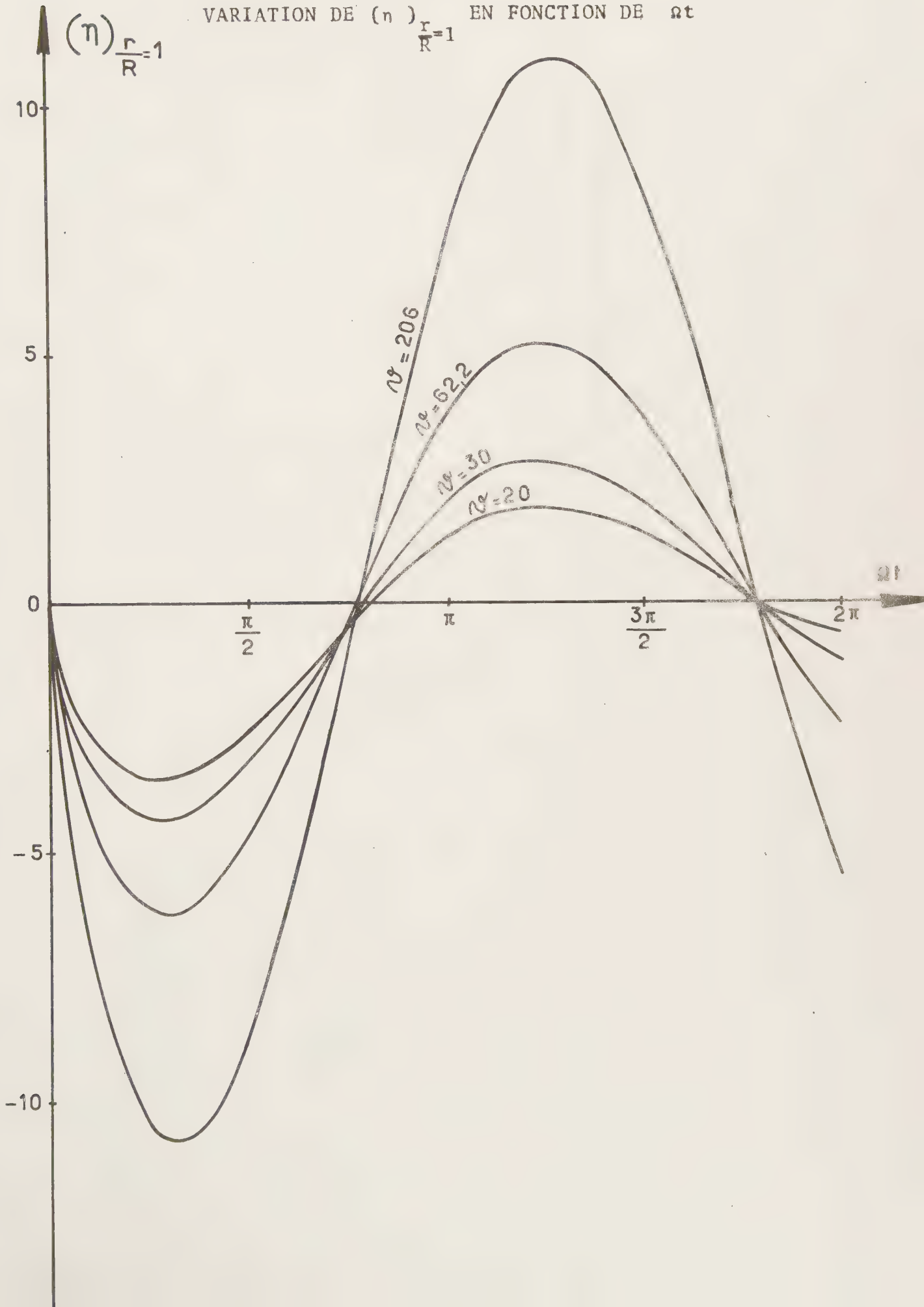


Fig. 27

VARIATION DE $(\eta)_{\frac{r}{R}=1}$ EN FONCTION DE Ωt



VARIATION DE $C_{fi} \cdot \nu \frac{h_o}{R}$ EN FONCTION DE Ωt Fig. 28

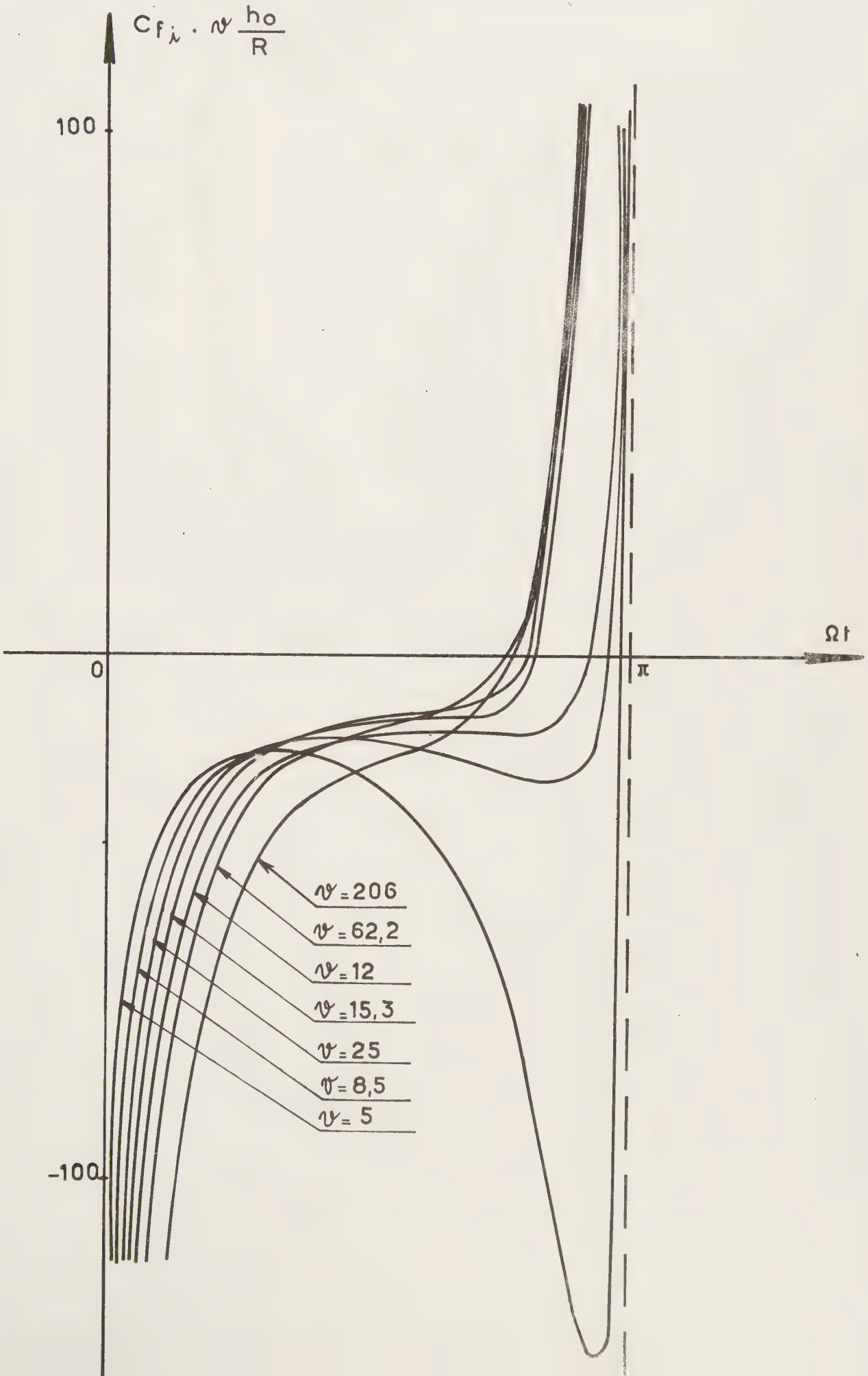
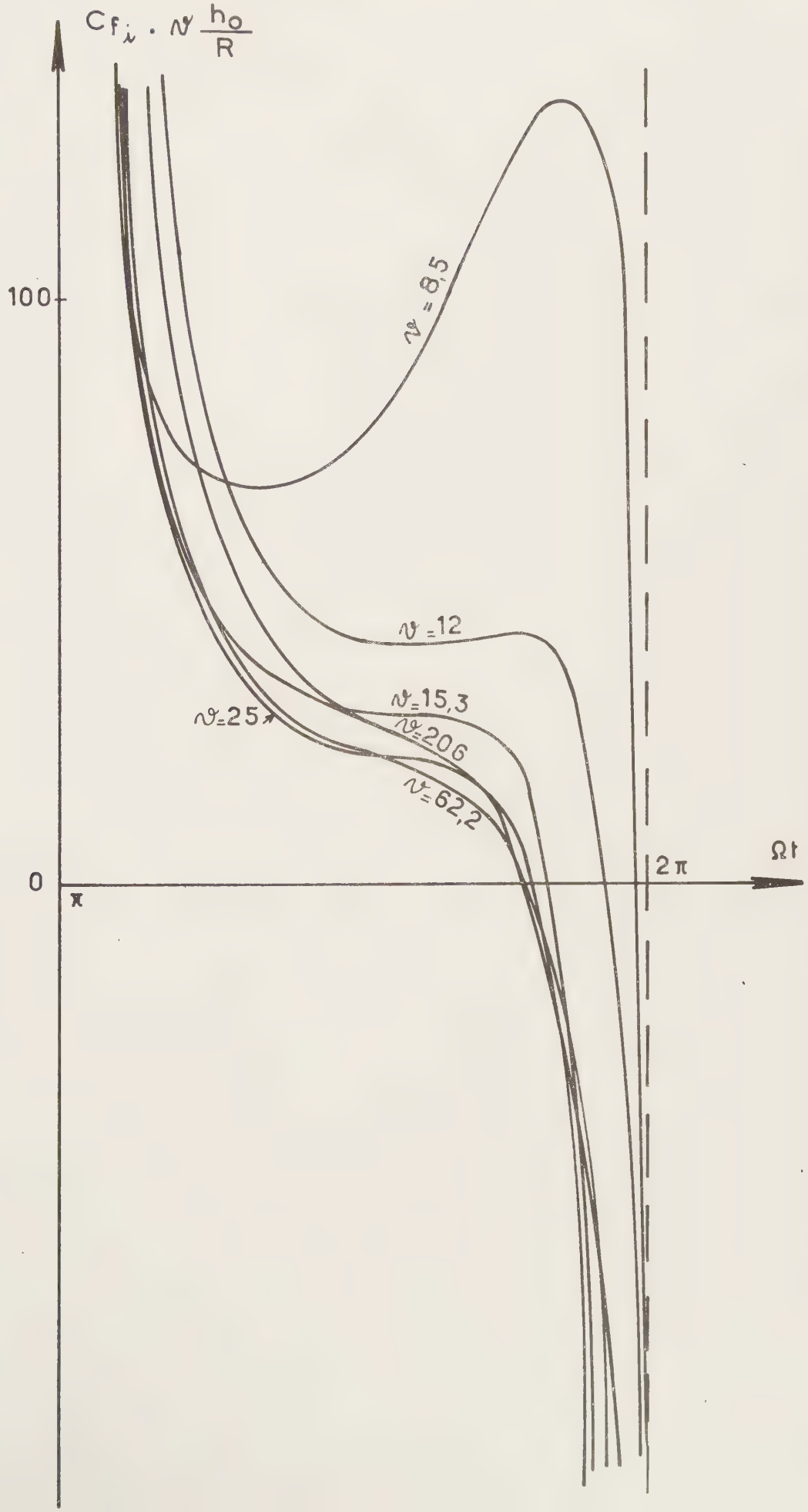


Fig. 29

VARIATION DE $C_{fi} \cdot \nu \frac{h_o}{R}$ EN FONCTION DE Ωt



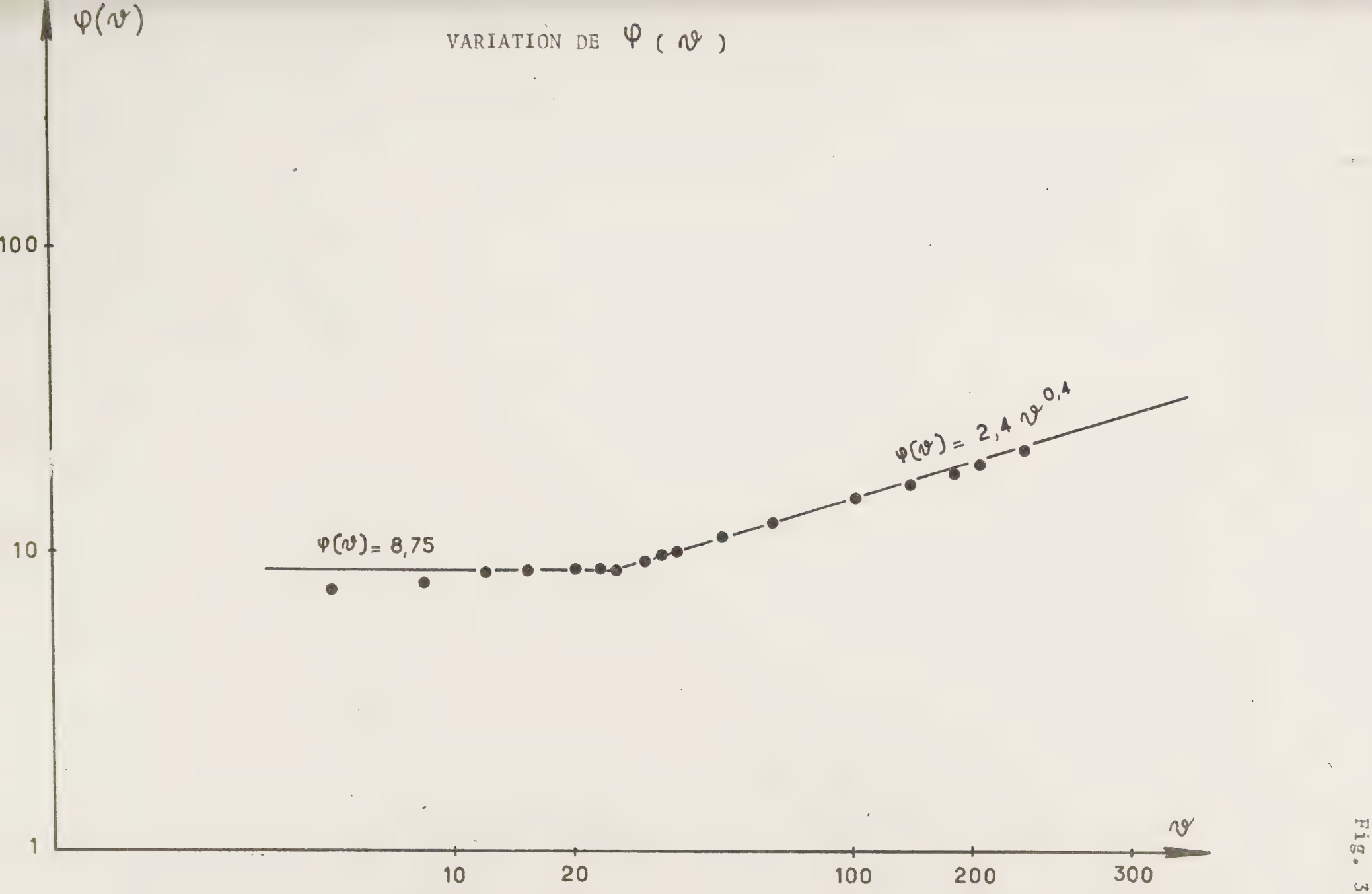


Fig. 30

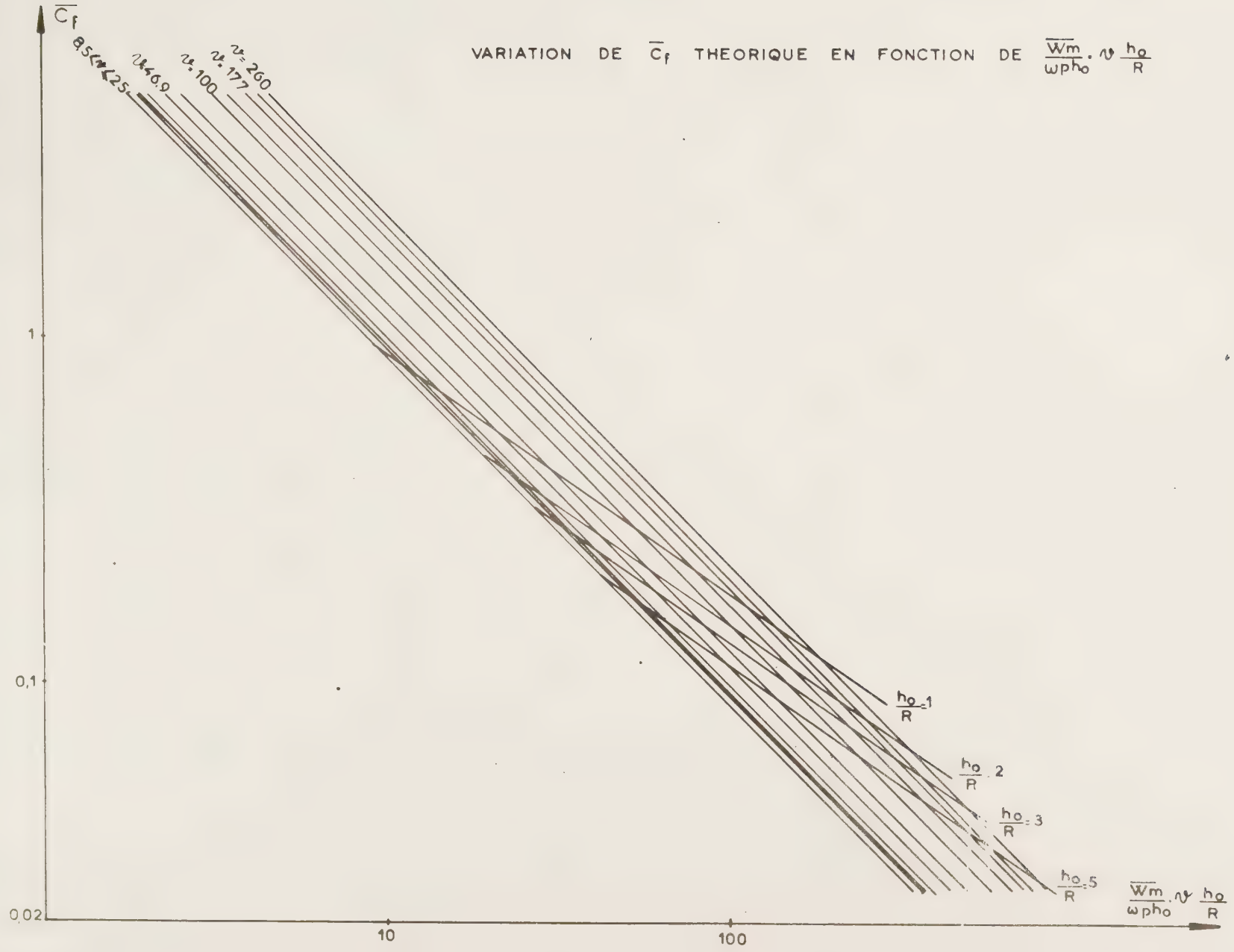

$\overline{C_f}$
VARIATION DE $\overline{C_f}$ THEORIQUE EN FONCTION DE $\frac{\overline{Wm}}{\omega p h_o} \cdot \nu \frac{h_o}{R}$
$\nu = 260$
$\nu = 177$
$\nu = 100$
$\nu = 46,9$
$\nu = 25$
$\frac{h_o}{R} = 1$
$\frac{h_o}{R} = 2$
$\frac{h_o}{R} = 3$
$\frac{h_o}{R} = 5$
1
0,1
0,02
10
100
$\frac{\overline{Wm}}{\omega p h_o} \cdot \nu \frac{h_o}{R}$

Fig. 31

AMORTISSEMENT THEORIQUE

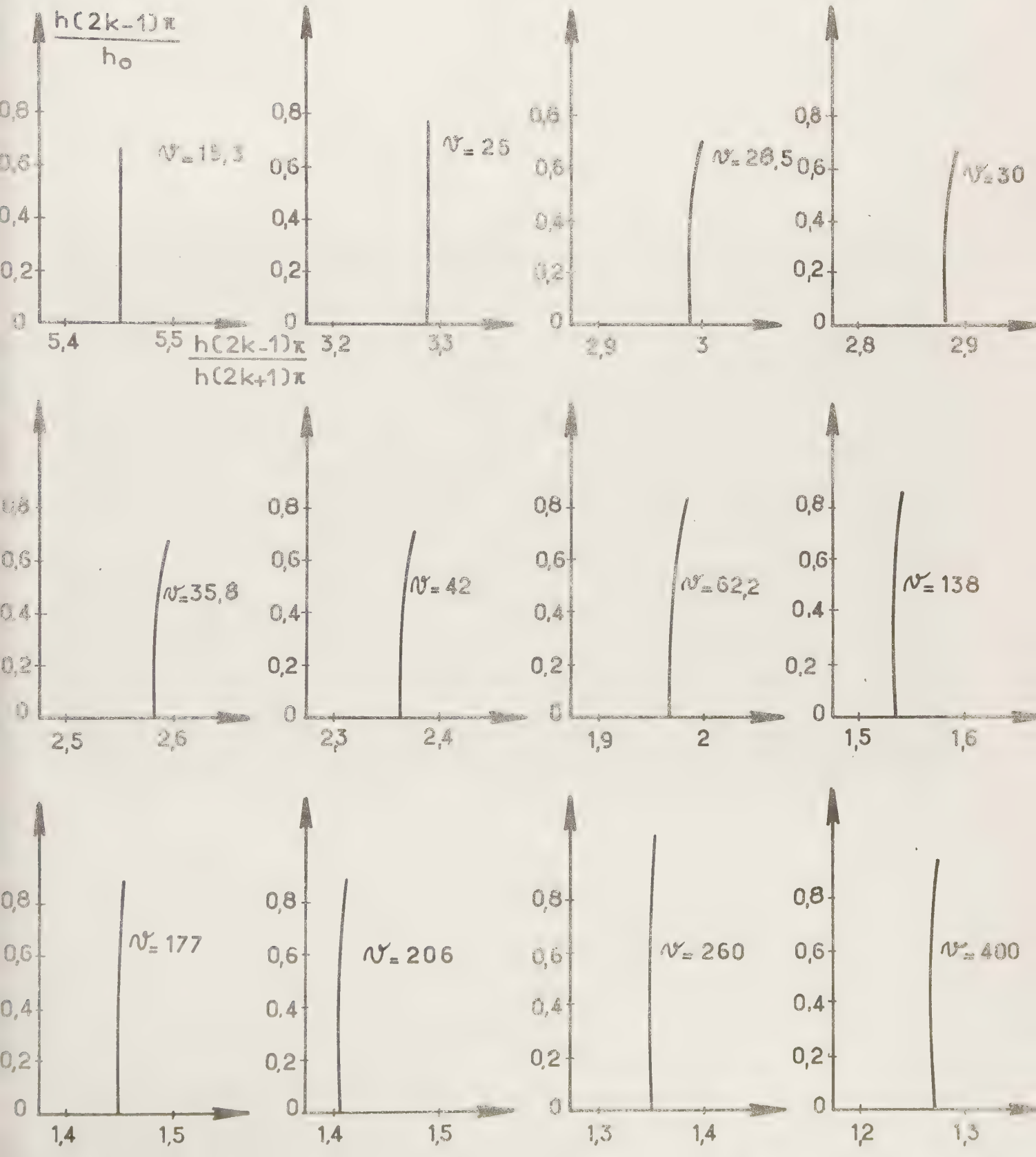
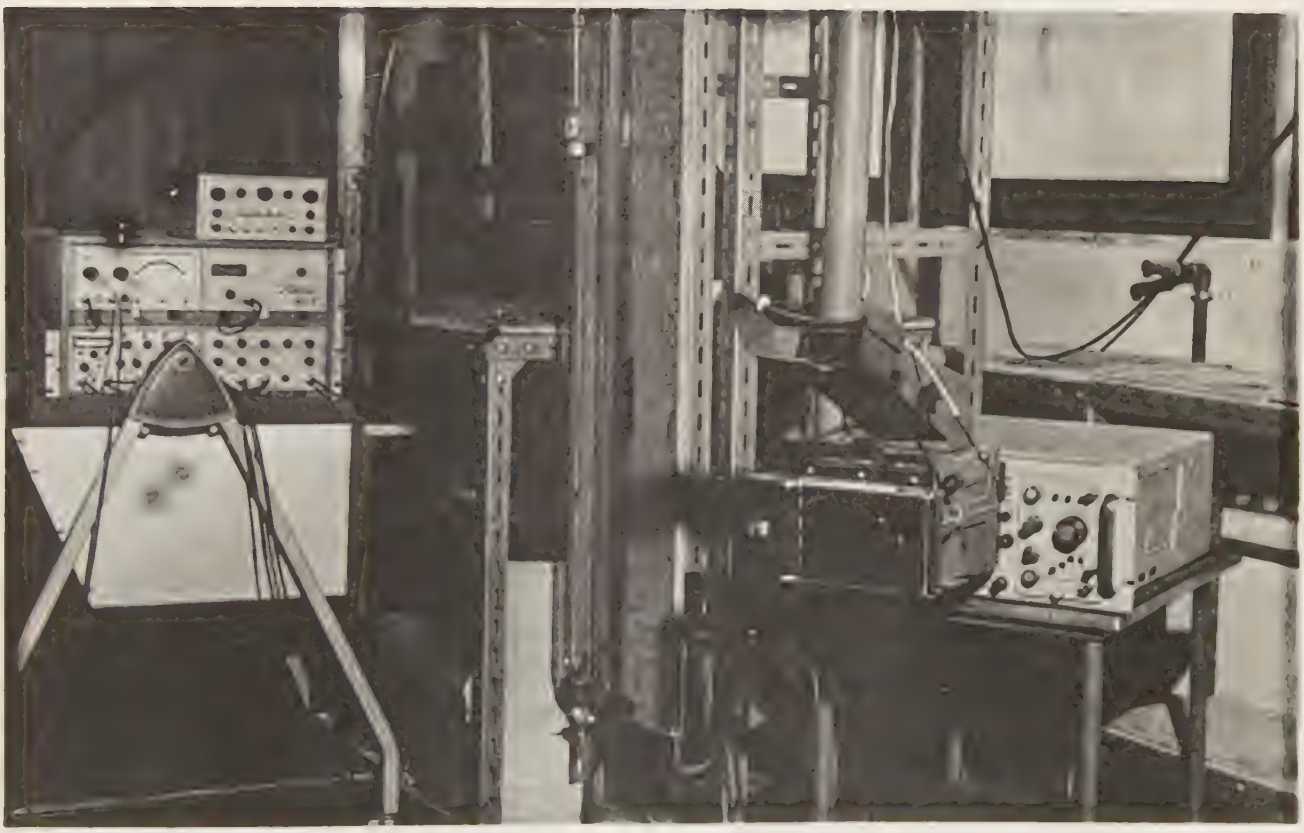


fig. 33

VUE D'ENSEMBLE DE L'APPAREILLAGE



SONDE ET SYSTEME DE DEPLACEMENT

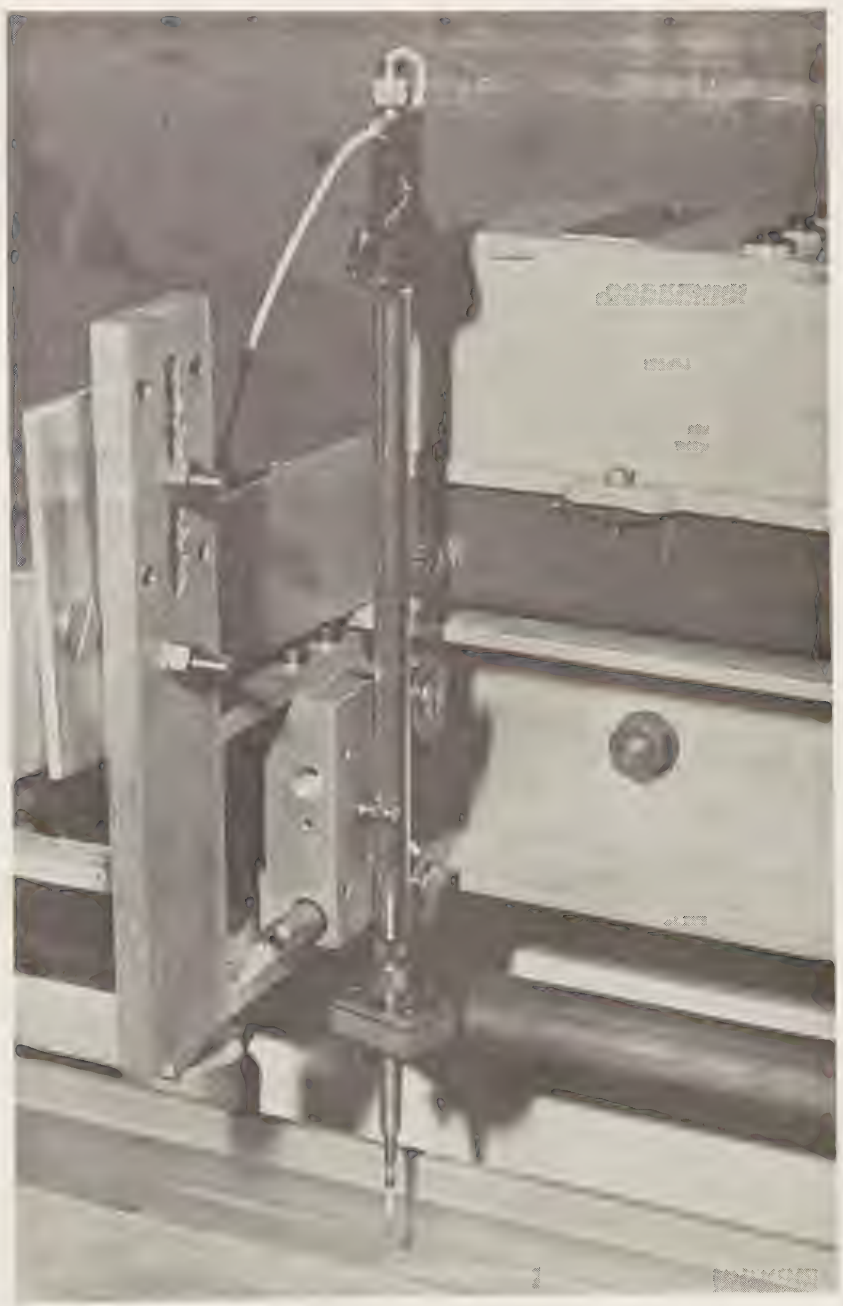
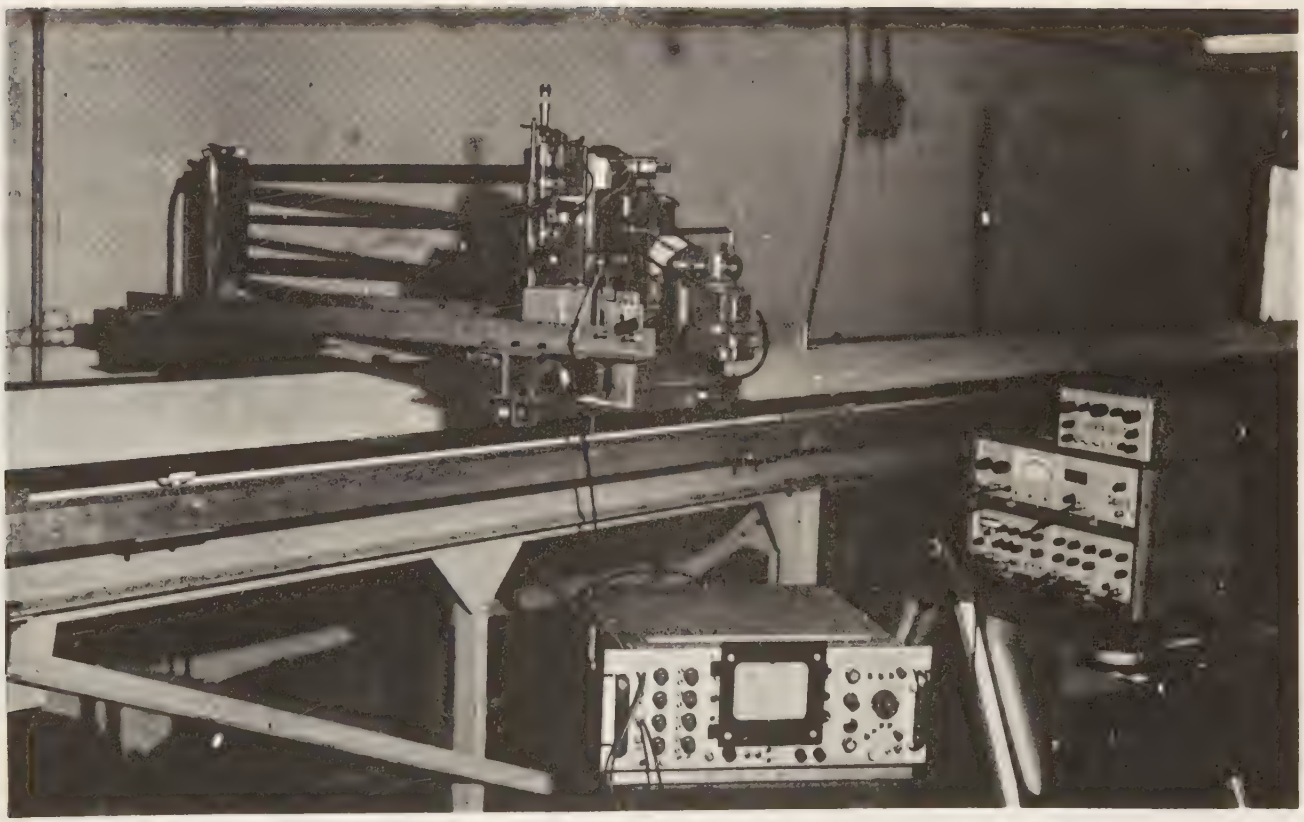


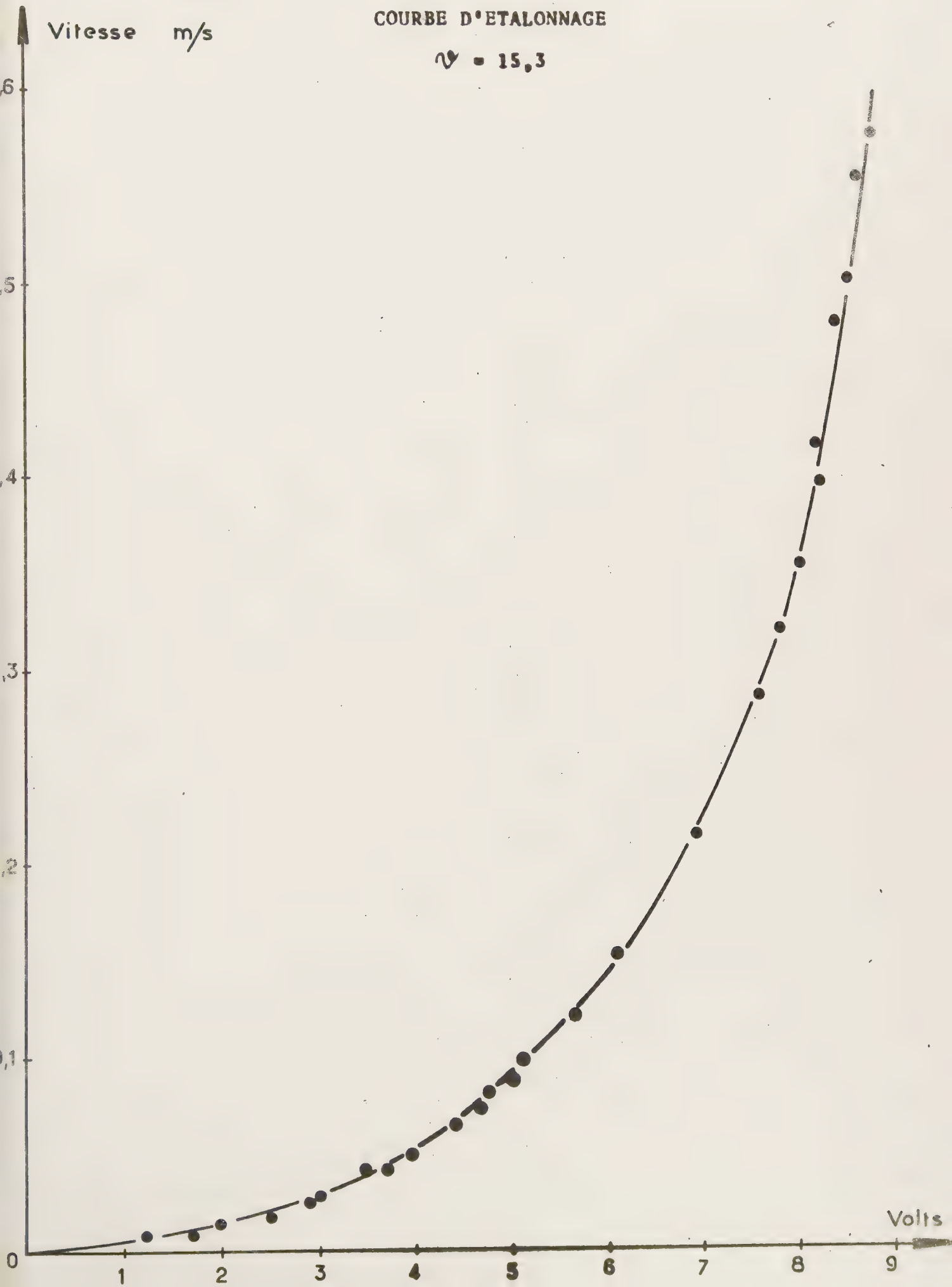
Fig. 35

PHOTO DU CANAL D'ETALONNAGE



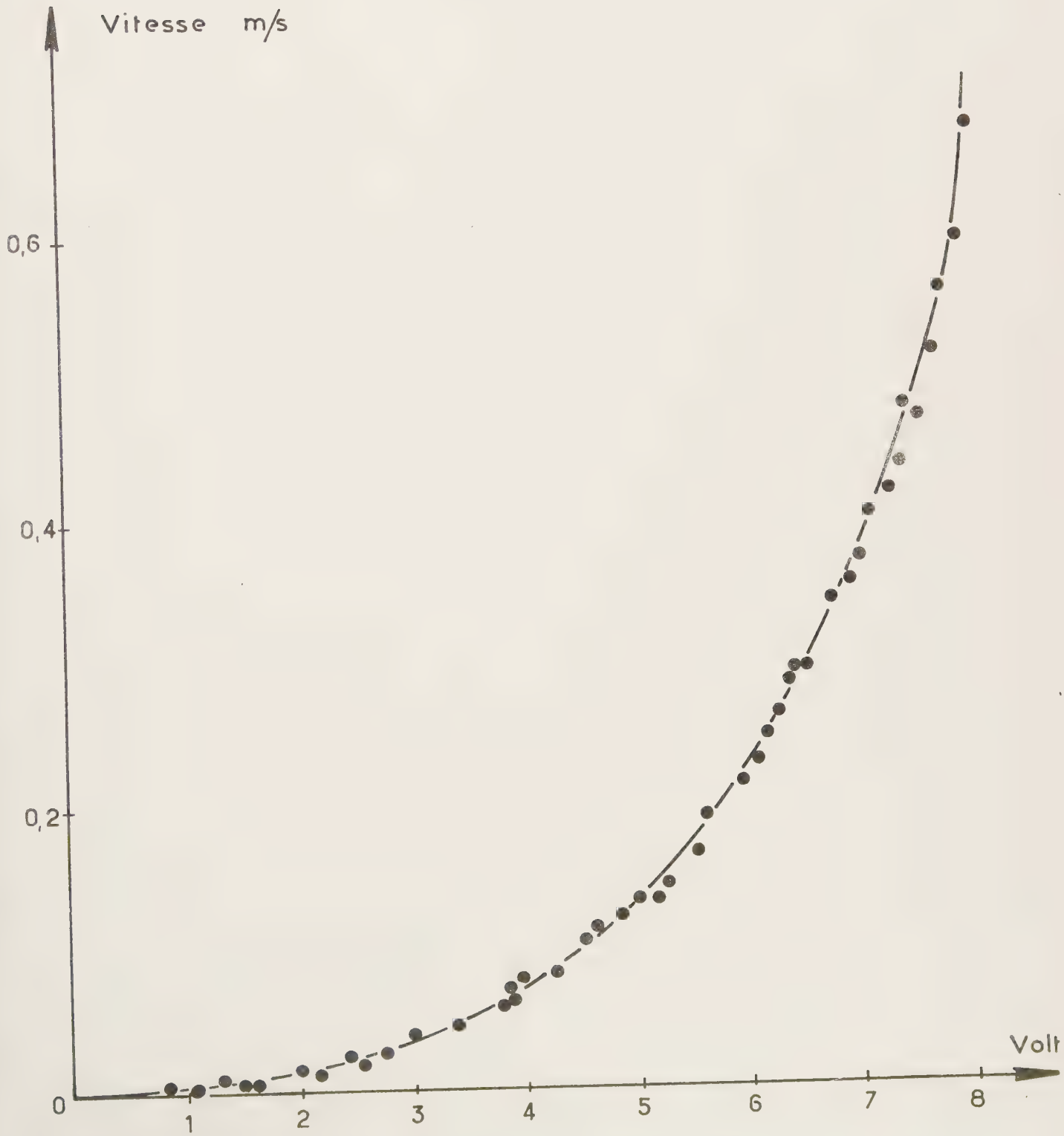
COURBE D'ETALONNAGE

ν = 15,3



COURBE D'ETALONNAGE

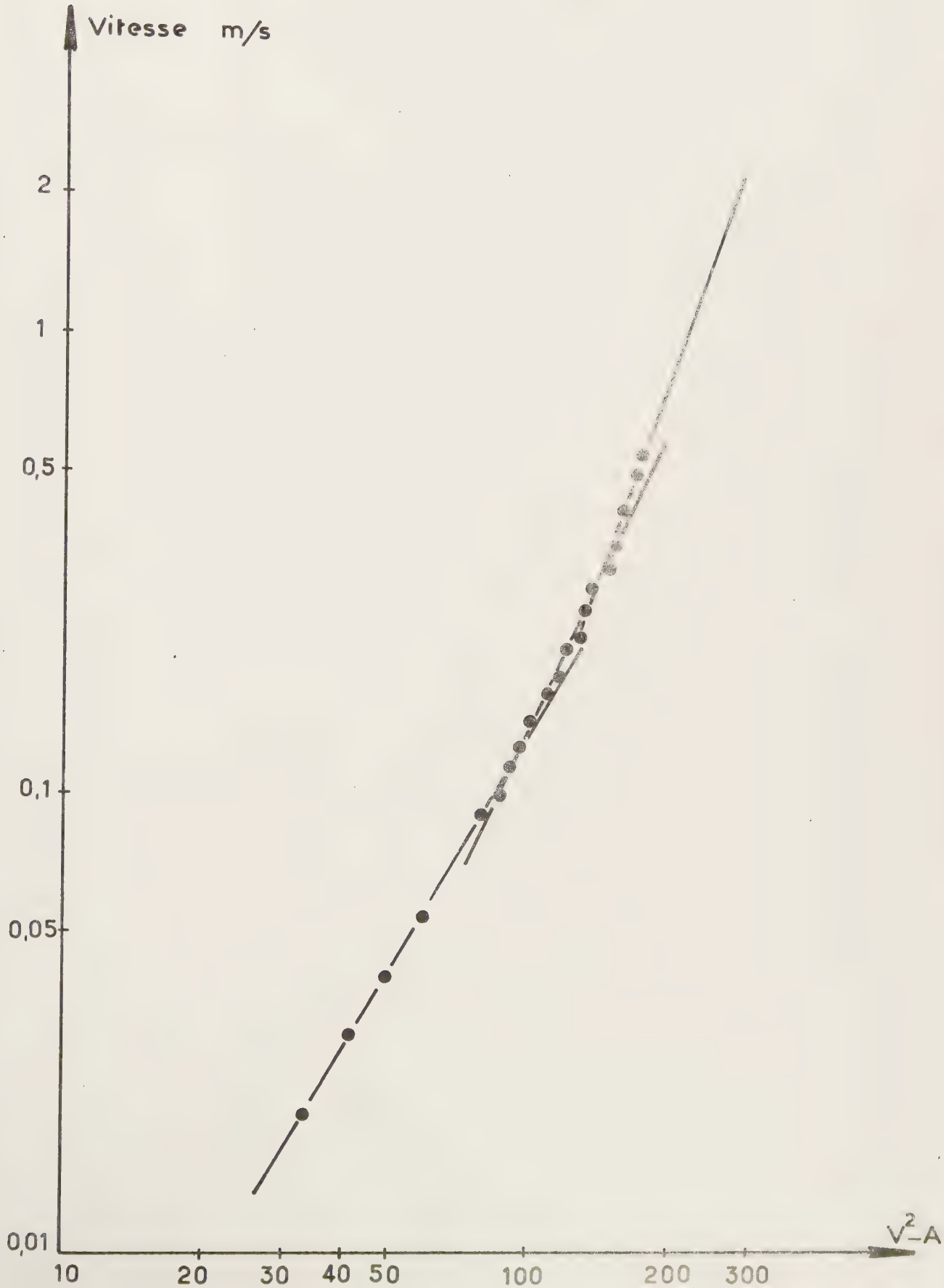
$\nu = 46,9$



COURBE D'ETALONNAGE LINEARISEE

ϑ = 15,3

A = 29,2



COURBE D'ETALONNAGE LINEARISEE

ϑ = 28,5

A = 23

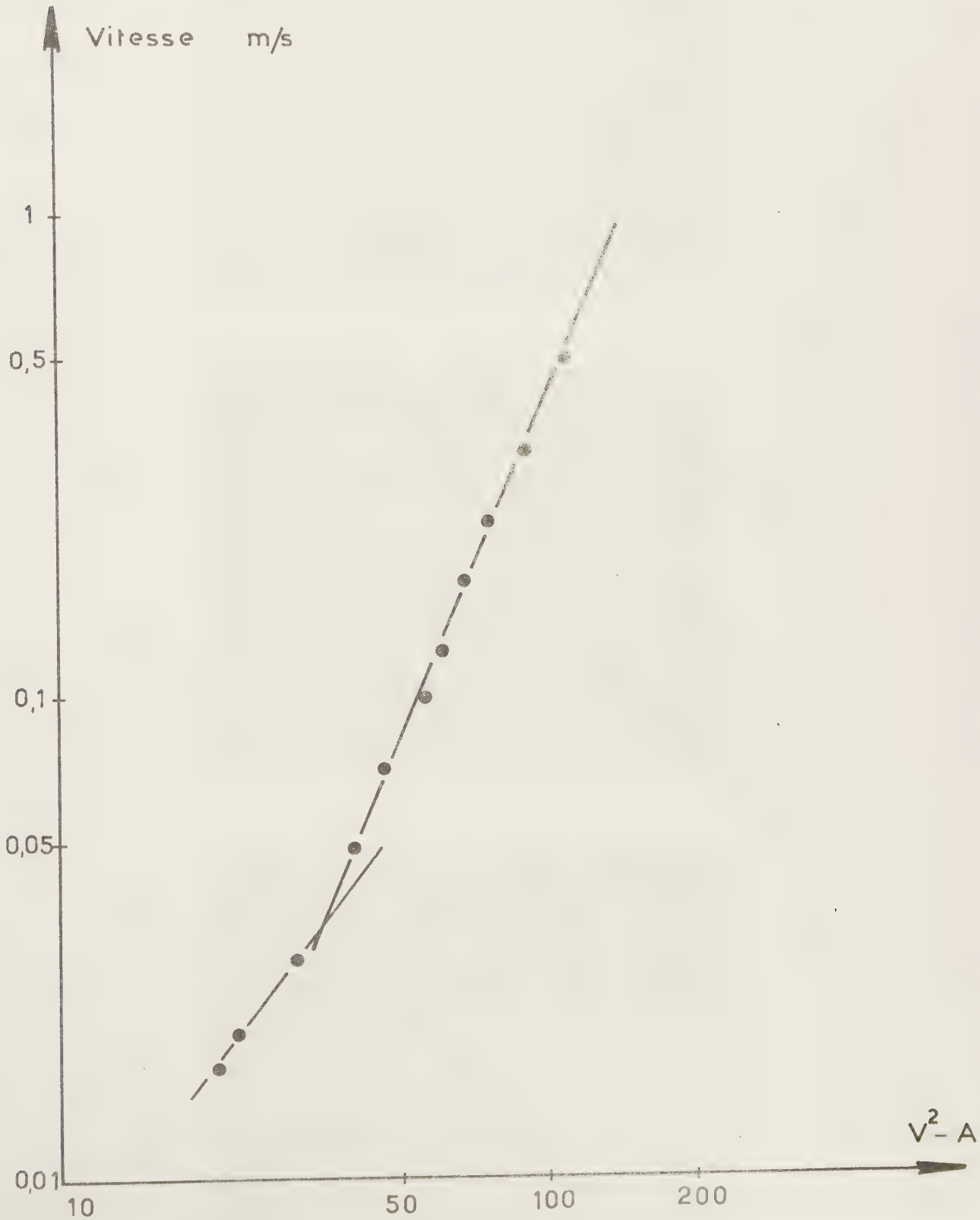
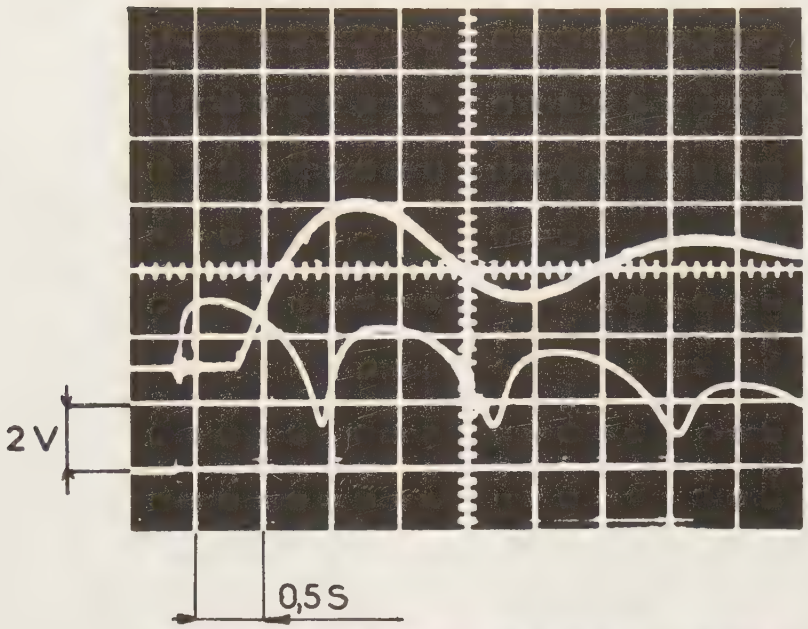


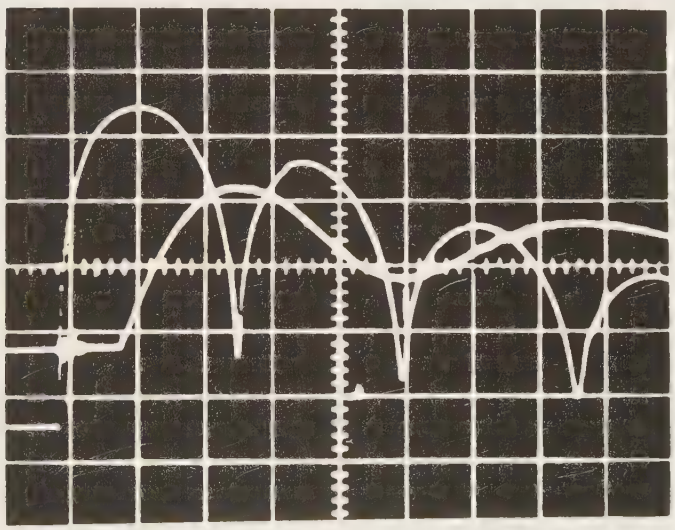
Fig. 40

ENREGISTREMENTS DES VITESSES

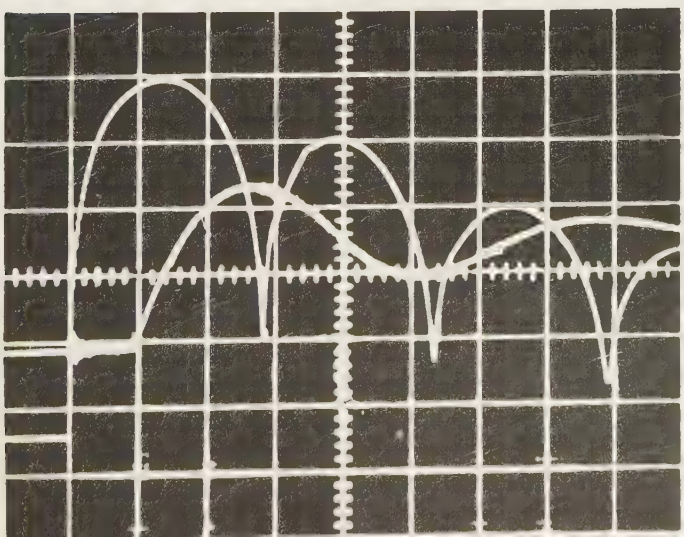
$\nu = 15,3$ $\quad \frac{h_o}{R} = 50$



$\frac{r}{R} = 0,95$



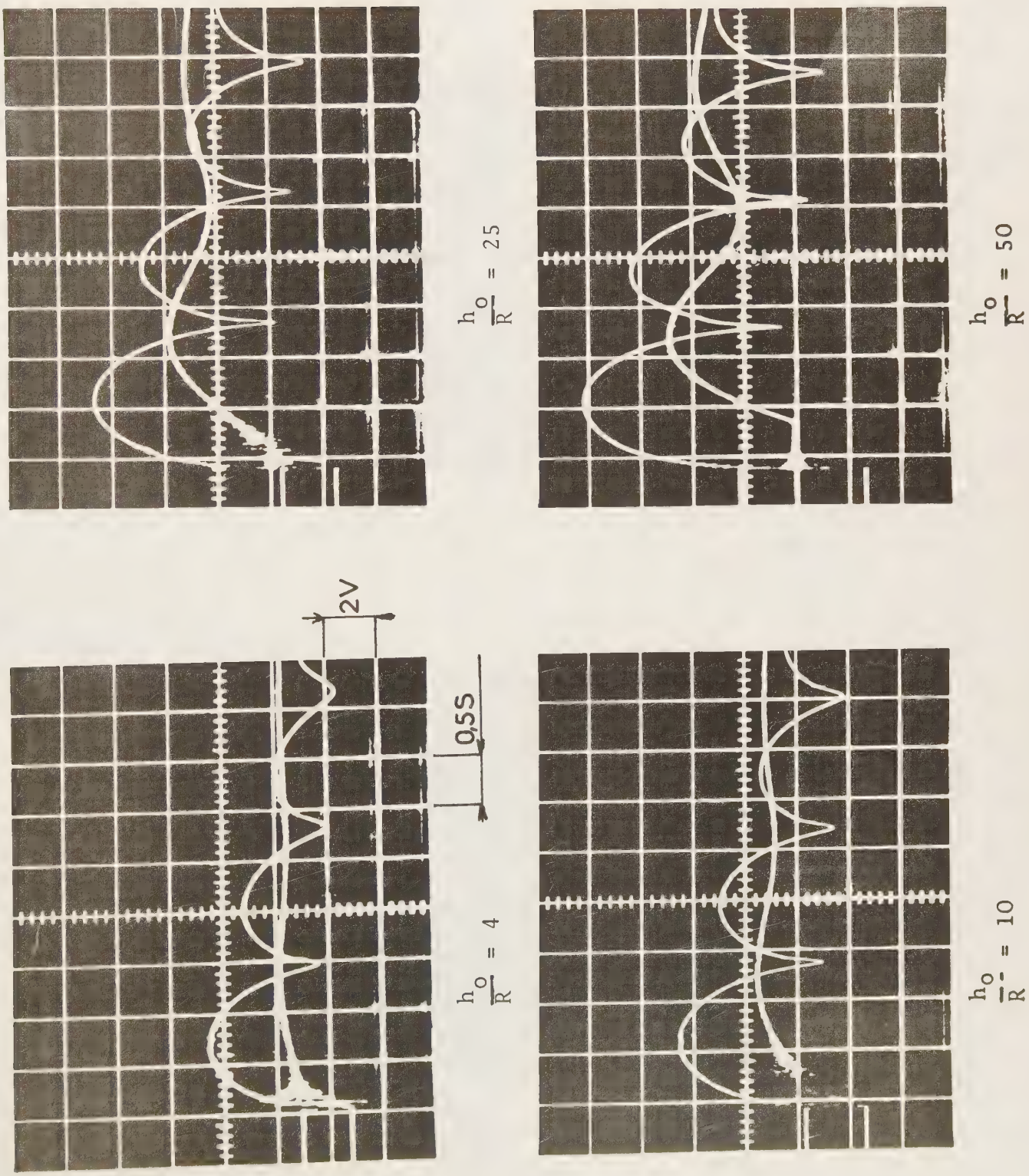
$\frac{r}{R} = 0,5$



$\frac{r}{R} = 0,1$

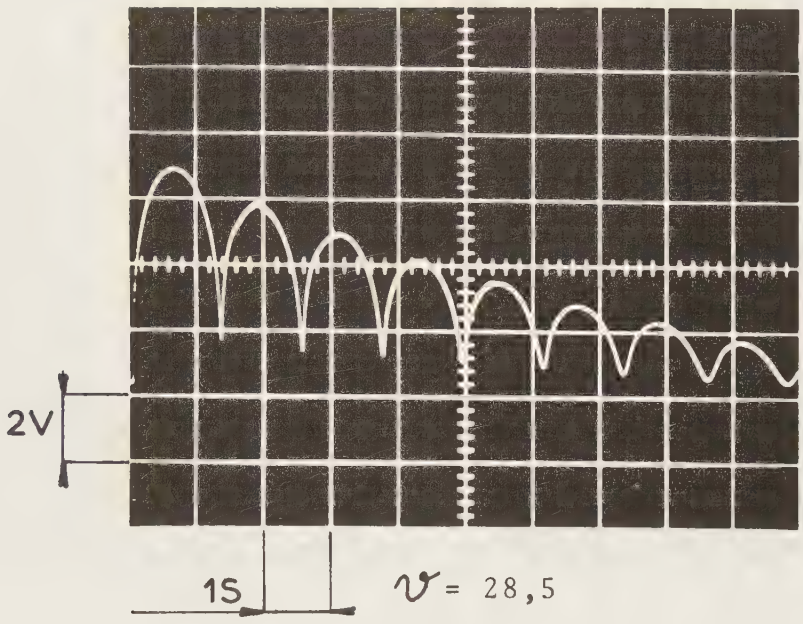
ENREGISTREMENTS DES VITESSES

$\mathcal{V} = 15,3$ $\quad \frac{r}{R} = 0$

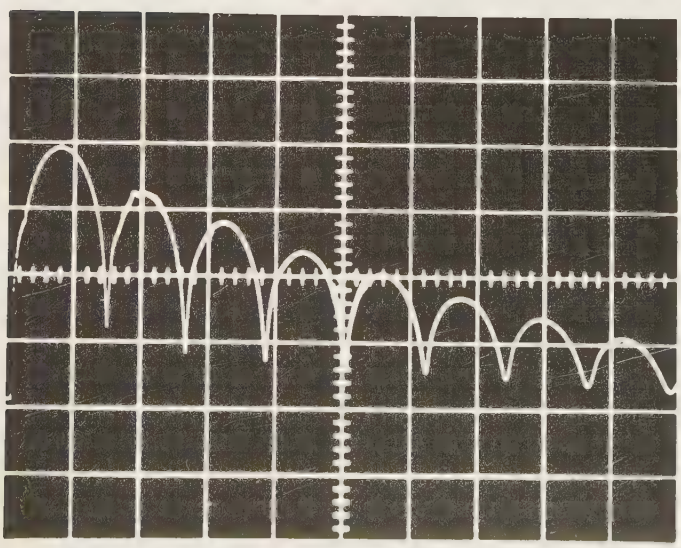


ENREGISTREMENTS DES VITESSES

$\frac{h_o}{R} = 50$ $\frac{r}{R} = 0$



$v = 28,5$



$v = 31,4$

Fig. 43

ENREGISTREMENTS DES VITESSES

$\vartheta = 35,8$. $\frac{r}{R} = 0$

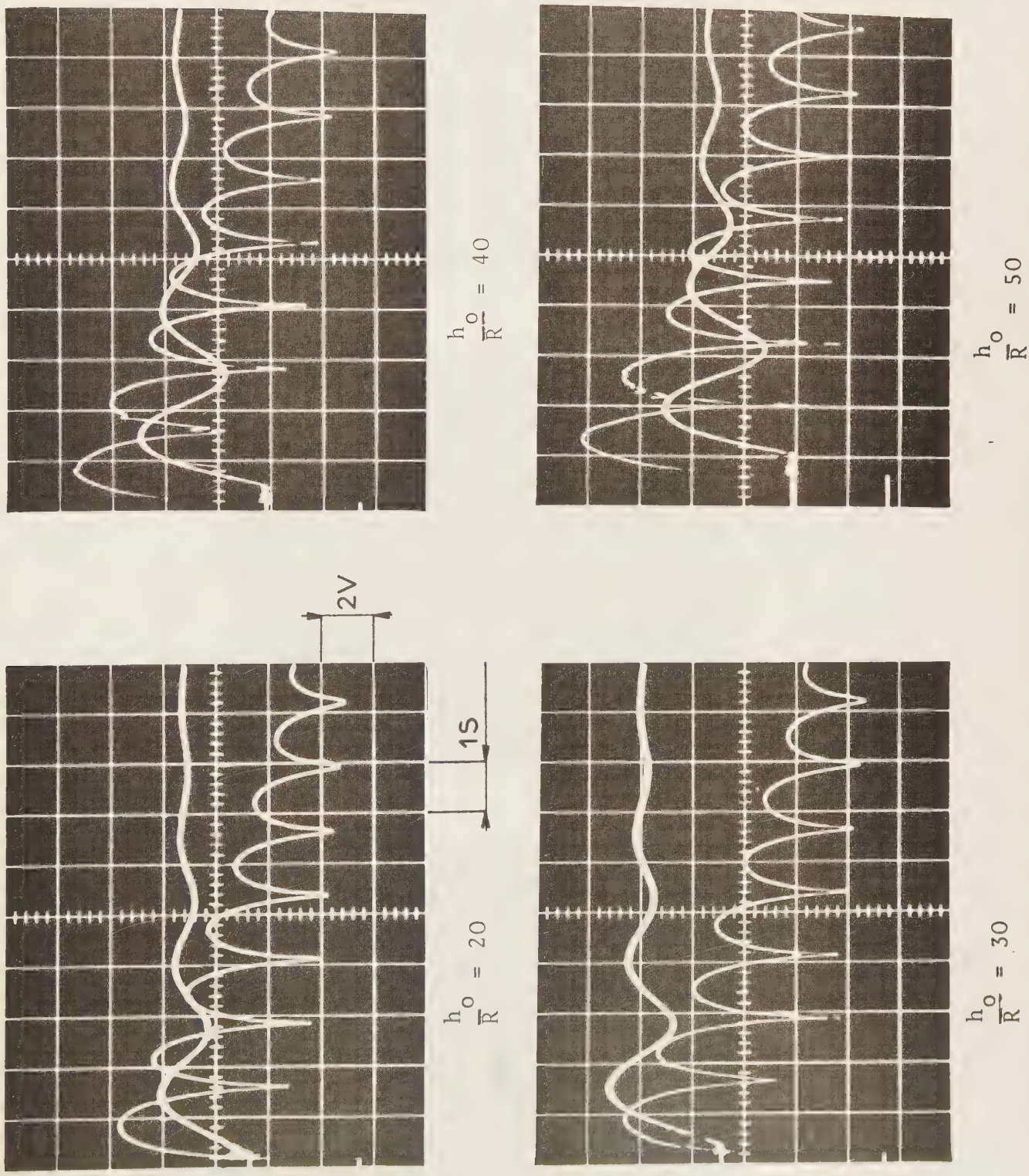
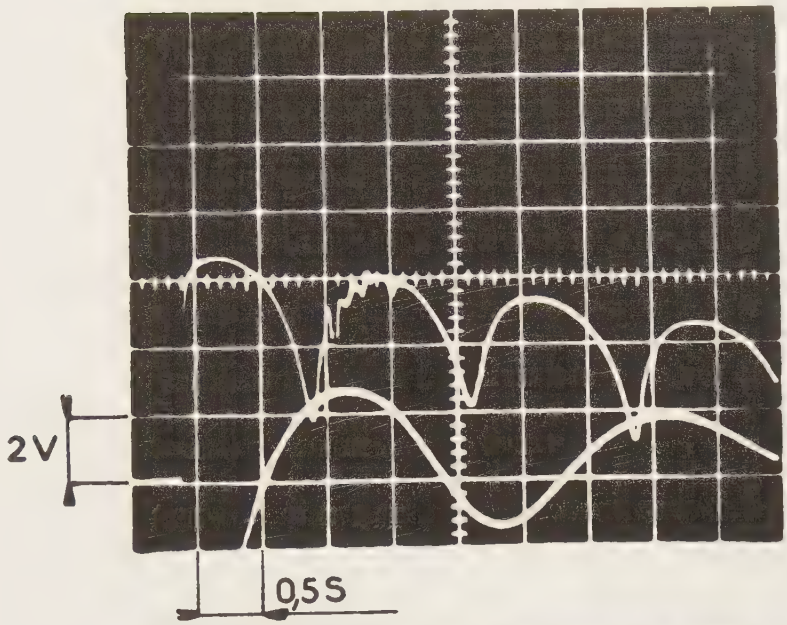


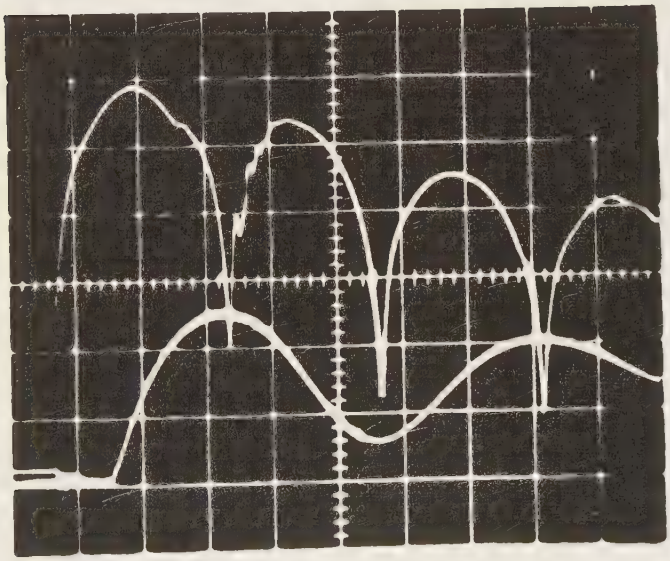
Fig. 44

ENREGISTREMENTS DES VITESSES

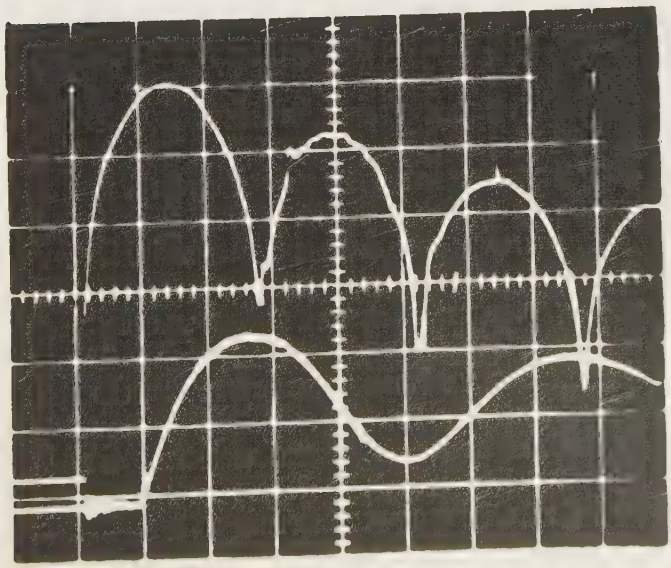
$\mathcal{V} = 35,8$ $\qquad \frac{h_o}{R} = 50$



$\frac{r}{R} = 0,95$



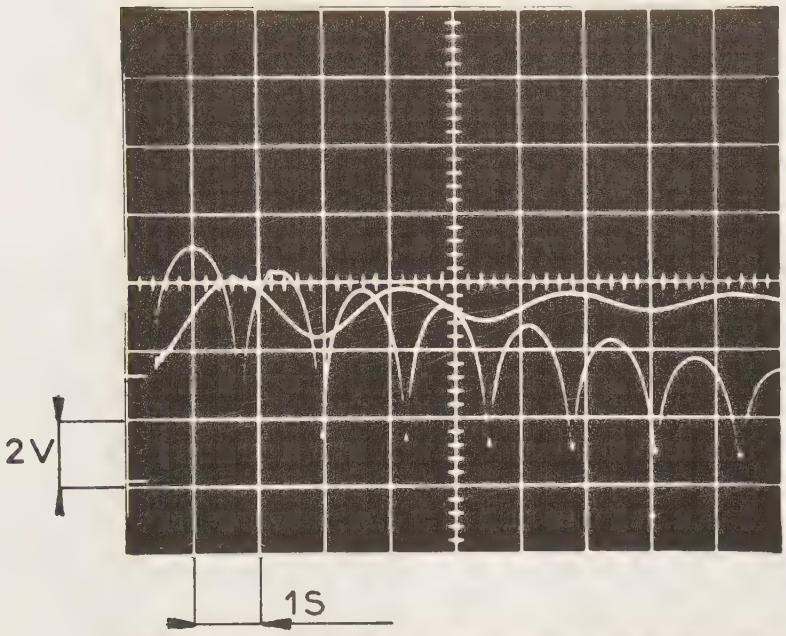
$\frac{r}{R} = 0,5$



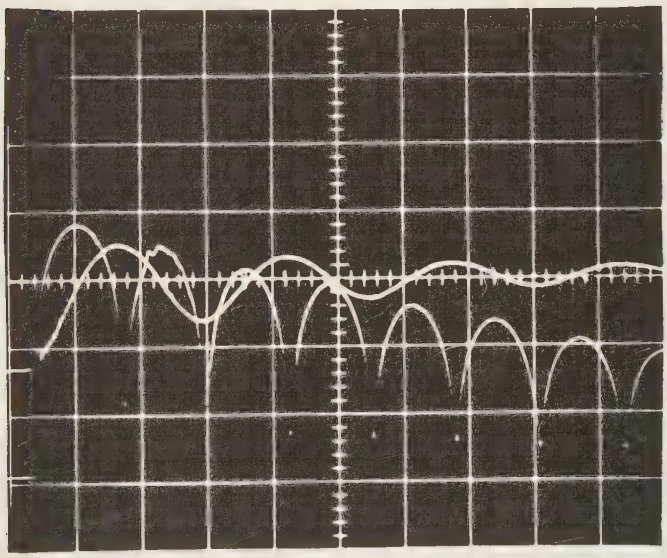
$\frac{r}{R} = 0$

ENREGISTREMENTS DES VITESSES

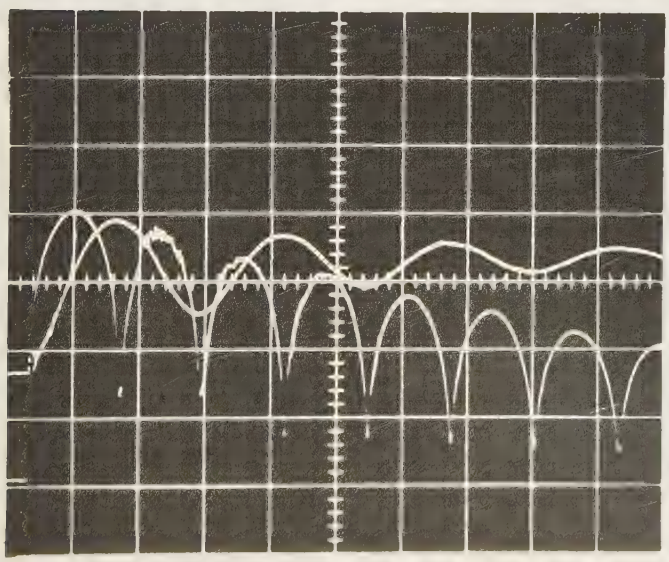
$\mathcal{V} = 62,2$ $\quad \frac{r}{R} = 0$



$\frac{h_o}{R} = 15$



$\frac{h_o}{R} = 20$

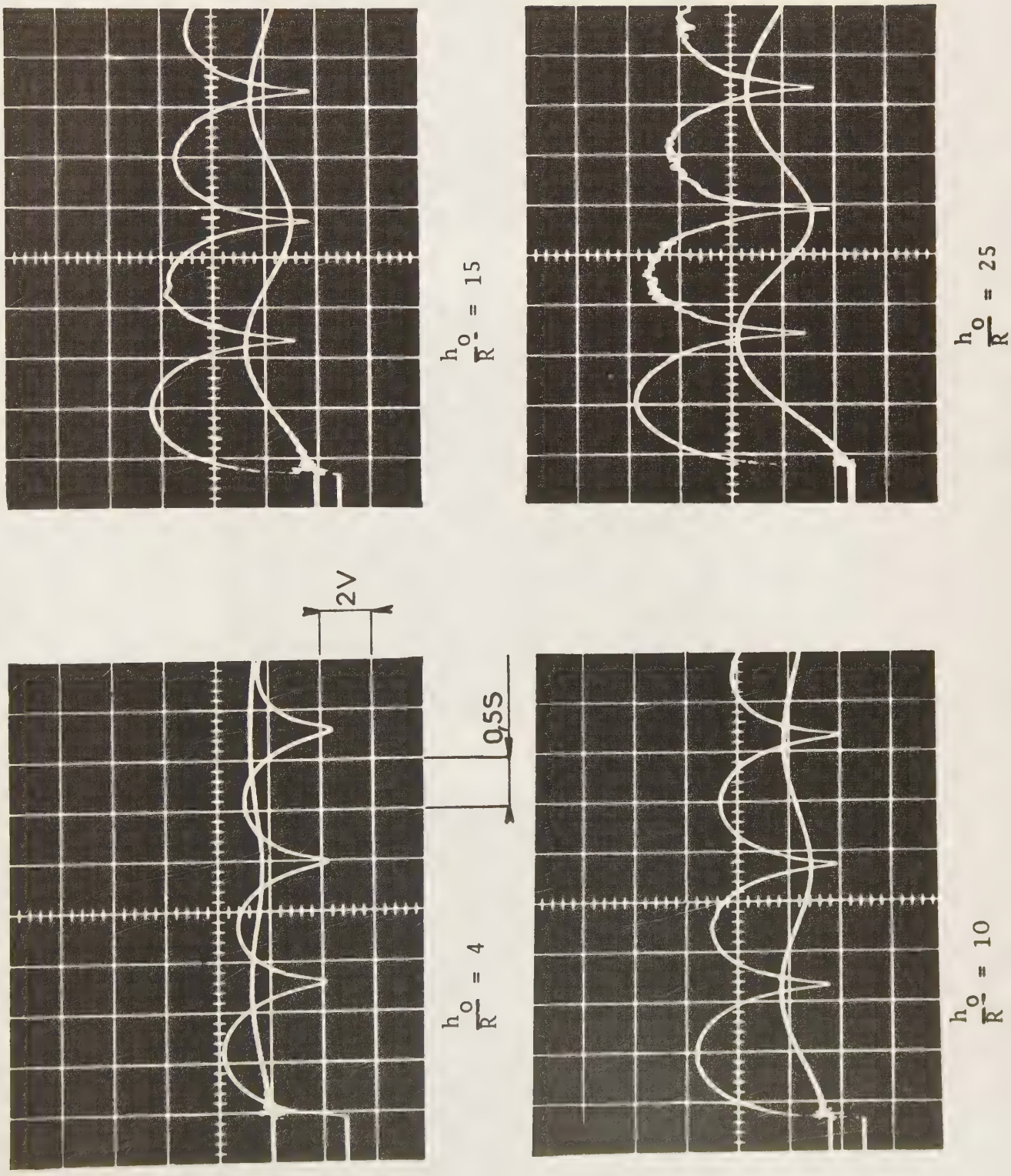


$\frac{h_o}{R} = 25$

Fig. 46

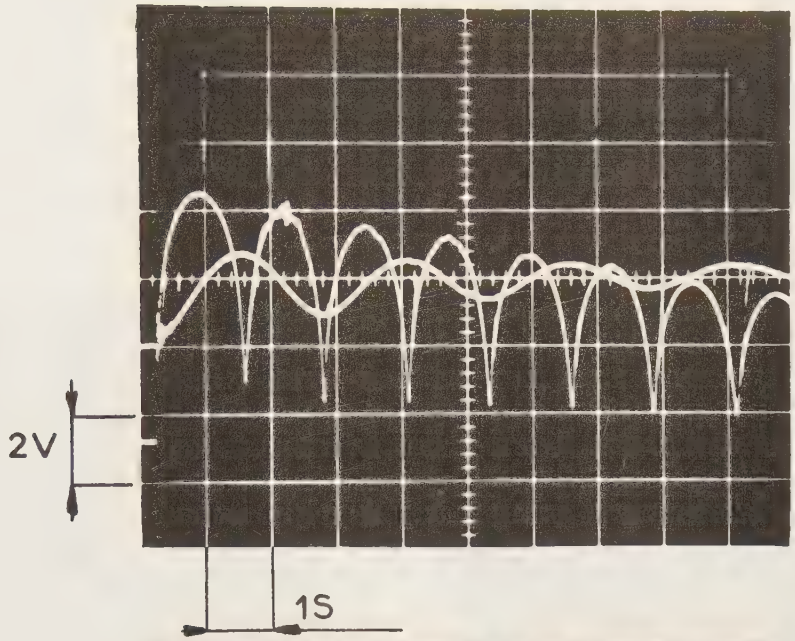
ENREGISTREMENTS DES VITESSES

$\nu = 138$ $\quad \frac{r}{R} = 0$

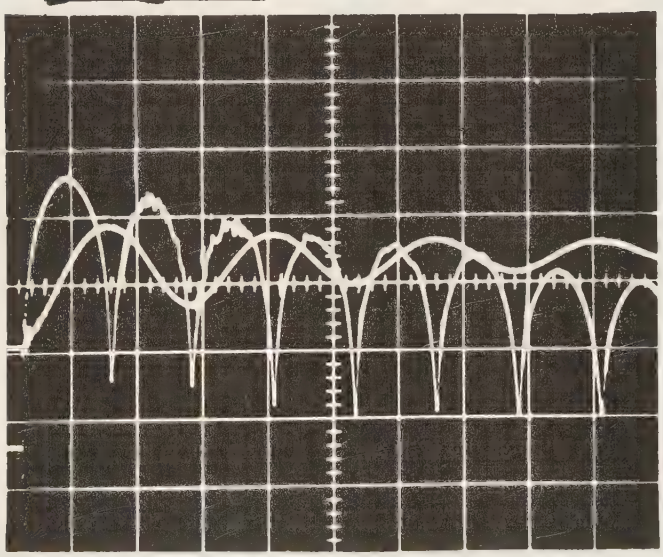


ENREGISTREMENTS DES VITESSES

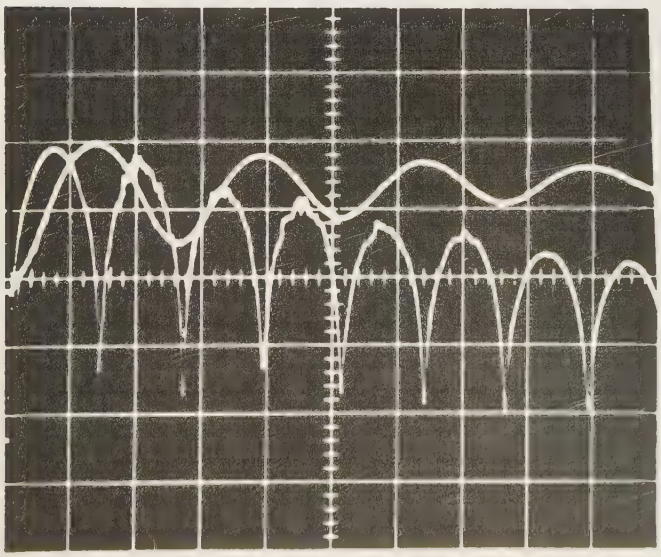
$\mathcal{V} = 138$ $\quad \frac{r}{R} = 0$



$\frac{h_o}{R} = 15$



$\frac{h_o}{R} = 20$



$\frac{h_o}{R} = 25$

Fig. 48

ENREGISTREMENTS DES VITESSES

$\mathcal{V} = 138$ $\quad \frac{r}{R} = 0{,}95$

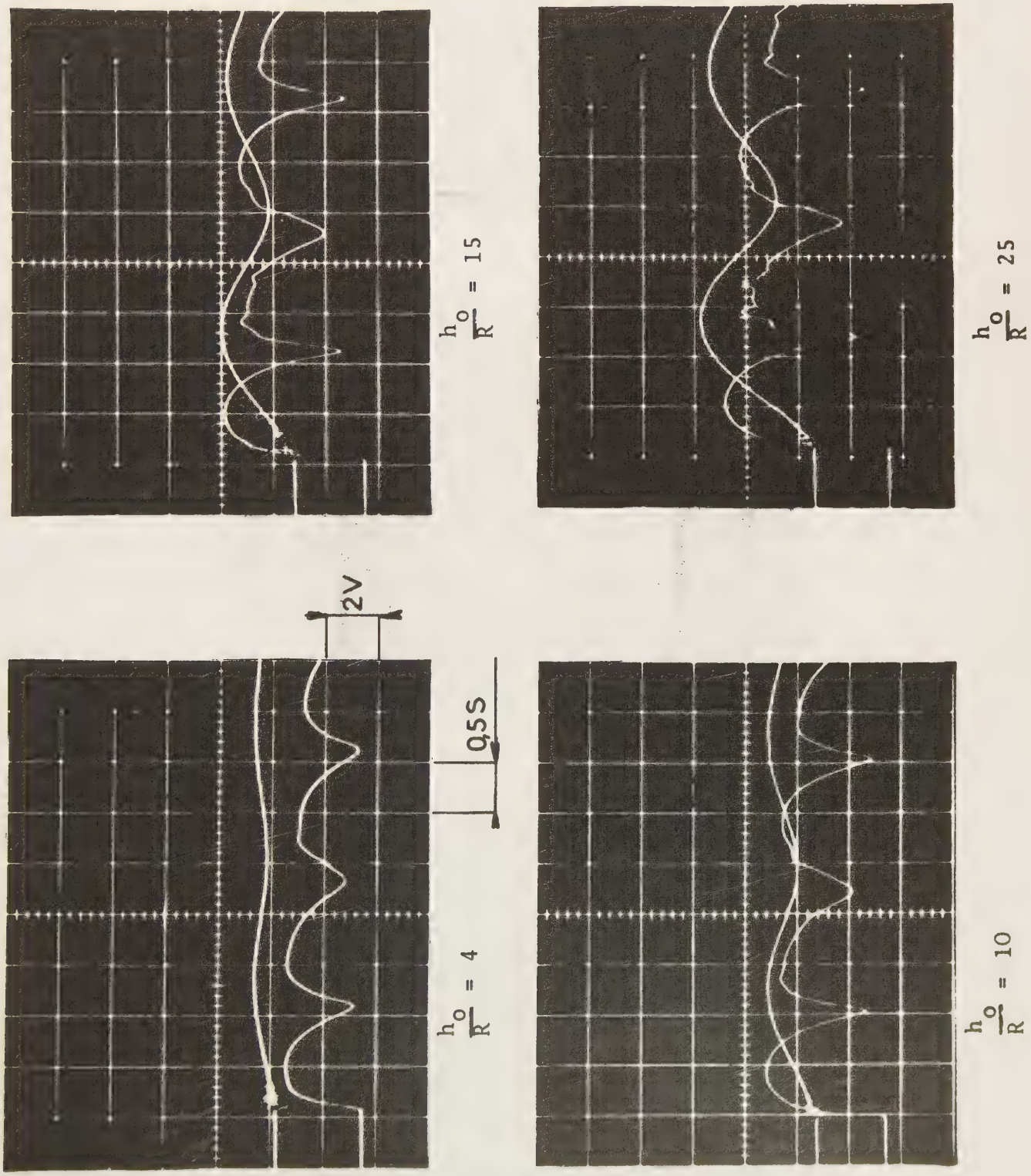
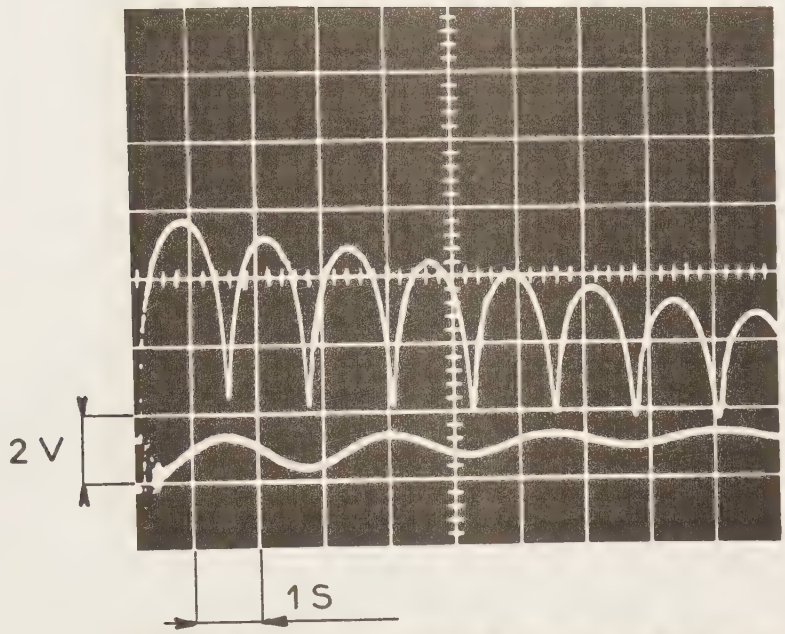


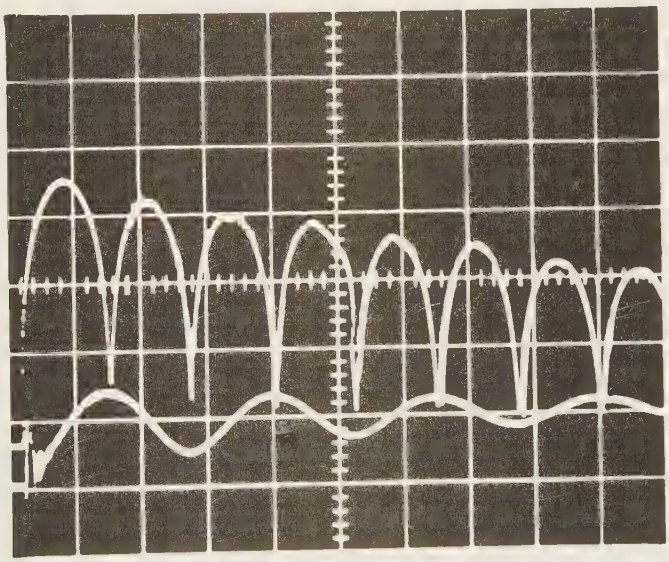
Fig. 49

ENREGISTREMENTS DES VITESSES

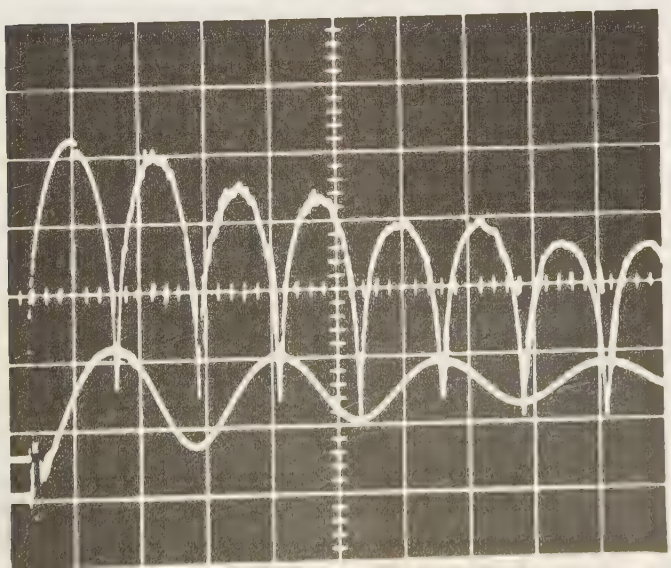
$\mathcal{V} = 177$ $\quad \frac{r}{R} = 0$



$\frac{h_o}{R} = 8$



$\frac{h_o}{R} = 15$

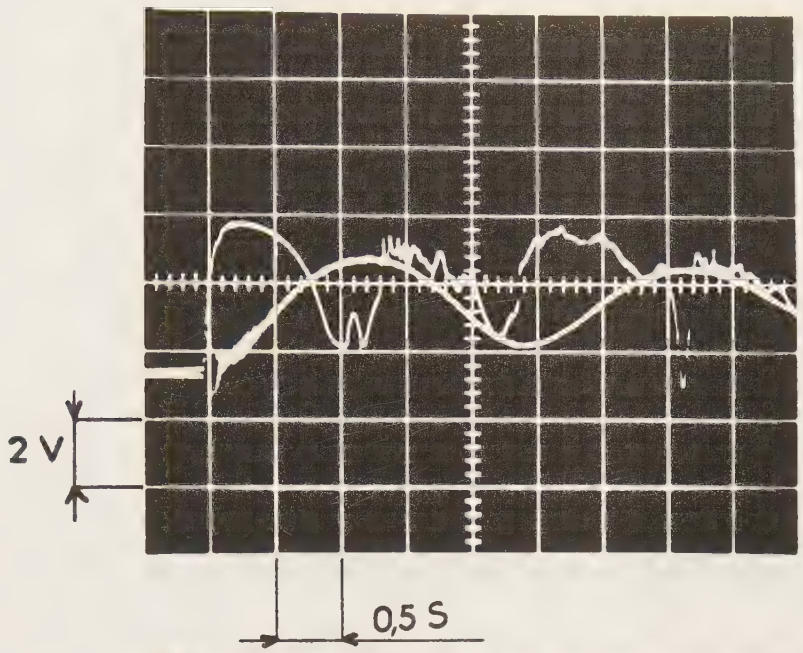


$\frac{h_o}{R} = 25$

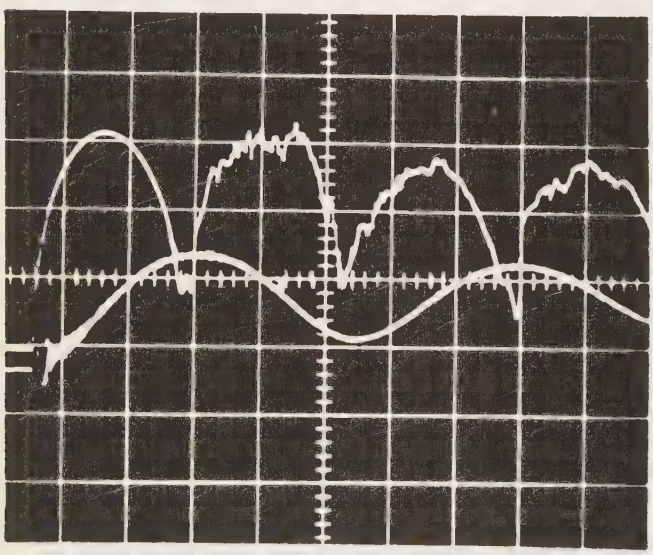
Fig. 50

ENREGISTREMENTS DES VITESSES

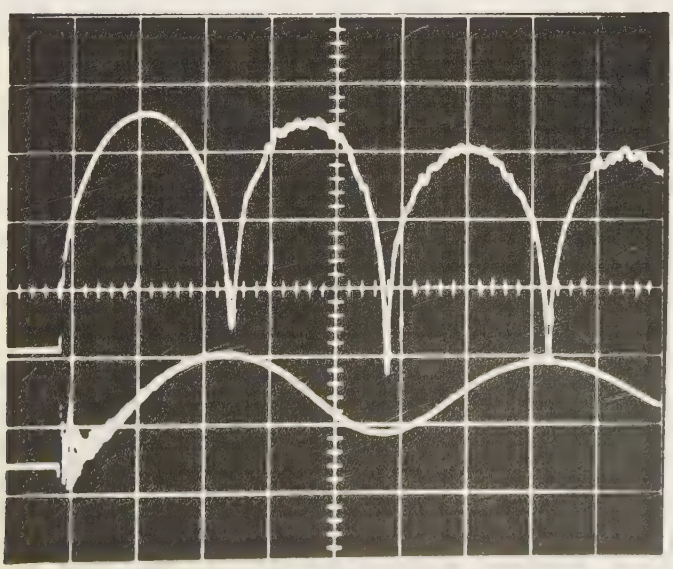
$\mathcal{V} = 260$ $\qquad \frac{h_o}{R} = 25$



$\frac{r}{R} = 0,95$



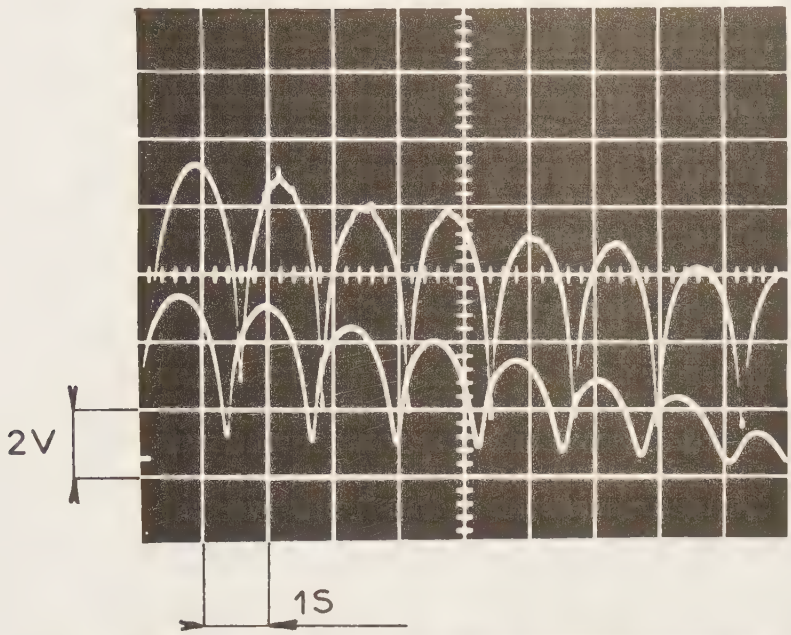
$\frac{r}{R} = 0,85$



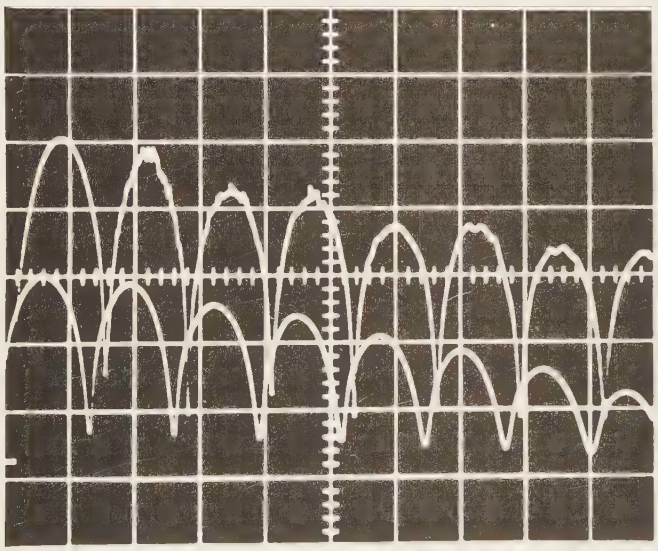
$\frac{r}{R} = 0,3$

ENREGISTREMENTS DES VITESSES

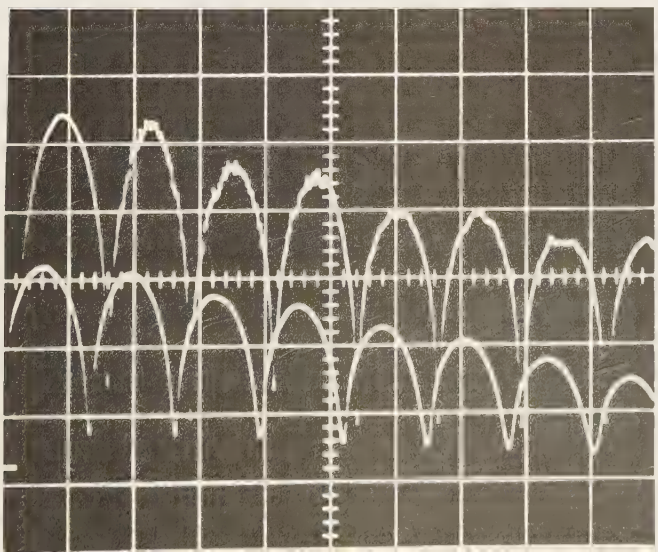
$\nu = 193,5$ $\frac{r}{R} = 0$



$\frac{h_o}{R} = 15$



$\frac{h_o}{R} = 20$

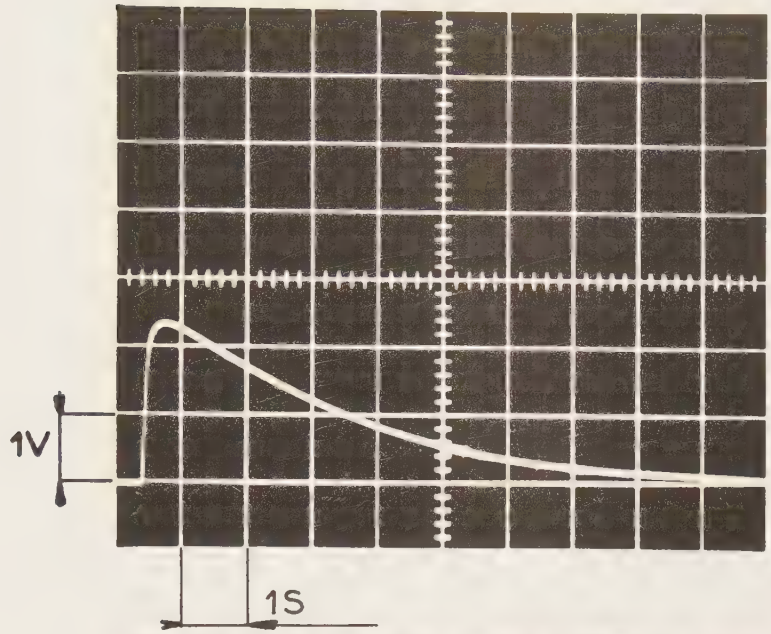


$\frac{h_o}{R} = 25$

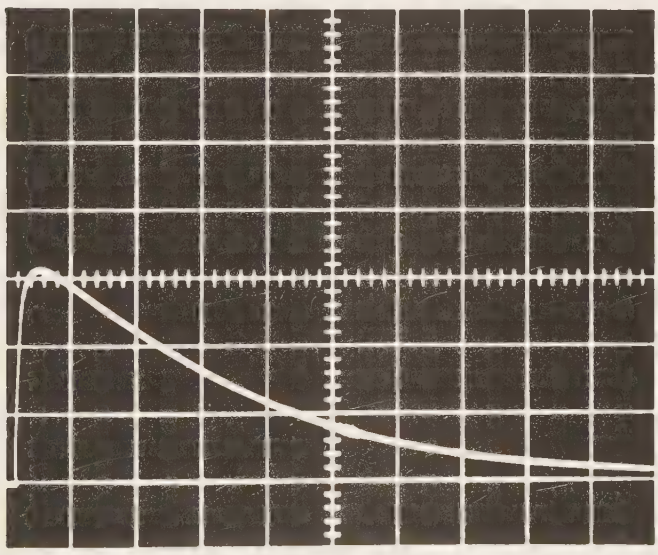
Fig. 52

ENREGISTREMENTS DES VITESSES

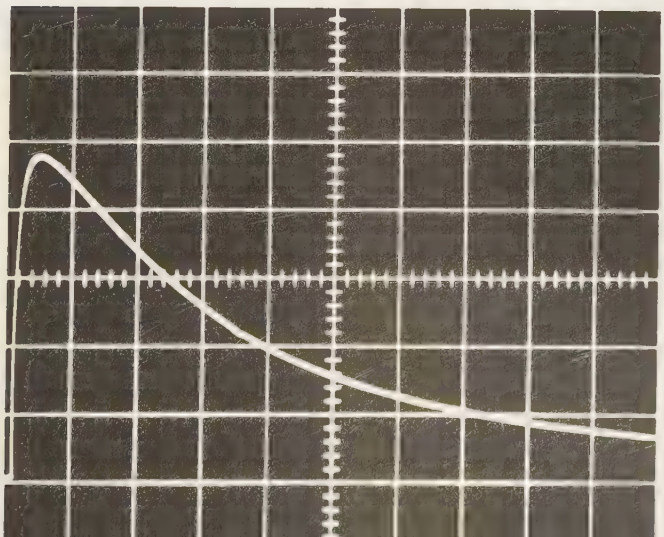
$\mathcal{V} = 2,04$ $\quad \frac{r}{R} = 0$



$\frac{h_o}{R} = 4$

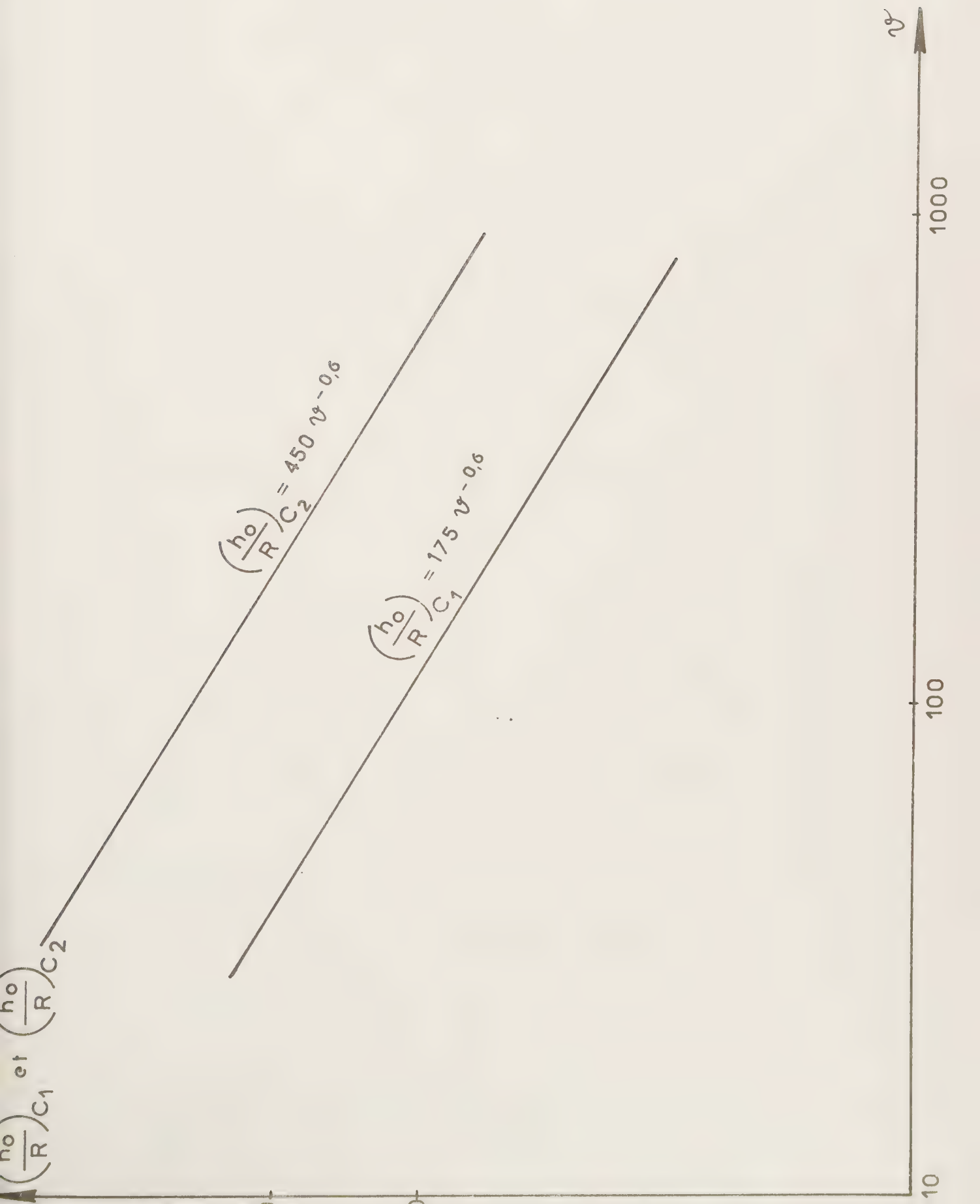


$\frac{h_o}{R} = 10$



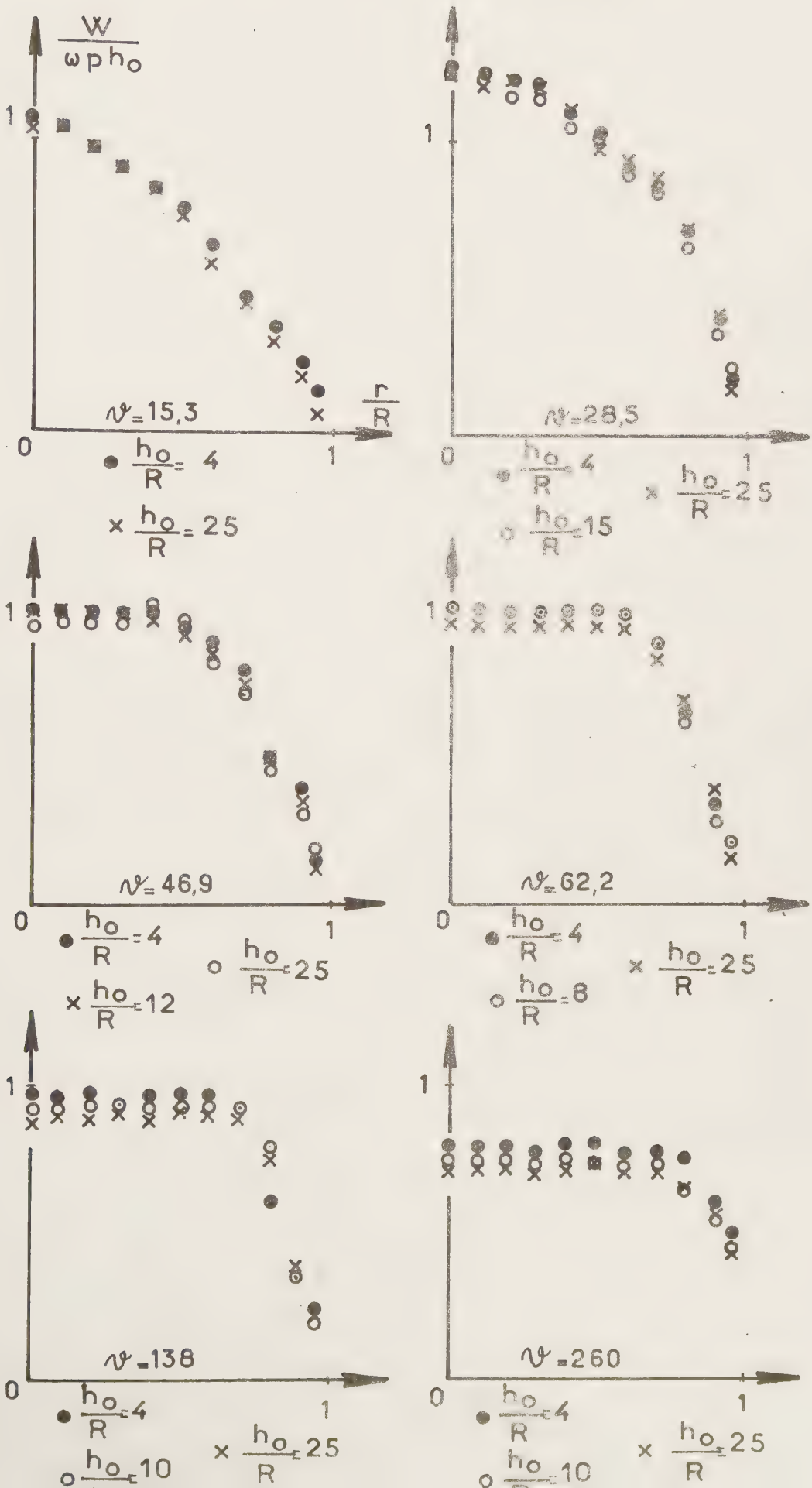
$\frac{h_o}{R} = 40$

VARIATION DE $(\frac{h_o}{R})_{c_1}$ ET DE $(\frac{h_o}{R})_{c_2}$ EN FONCTION DE $\mathcal{V}$



PROFILS DES VITESSES INSTANTANEES EXPERIMENTAUX

$(\Omega t = \frac{\pi}{2})$



VARIATION DE LA VITESSE INSTANTANEE EXPERIMENTALE
AU CENTRE DU TUBE EN FONCTION DE h_o

$\vartheta = 15,3$

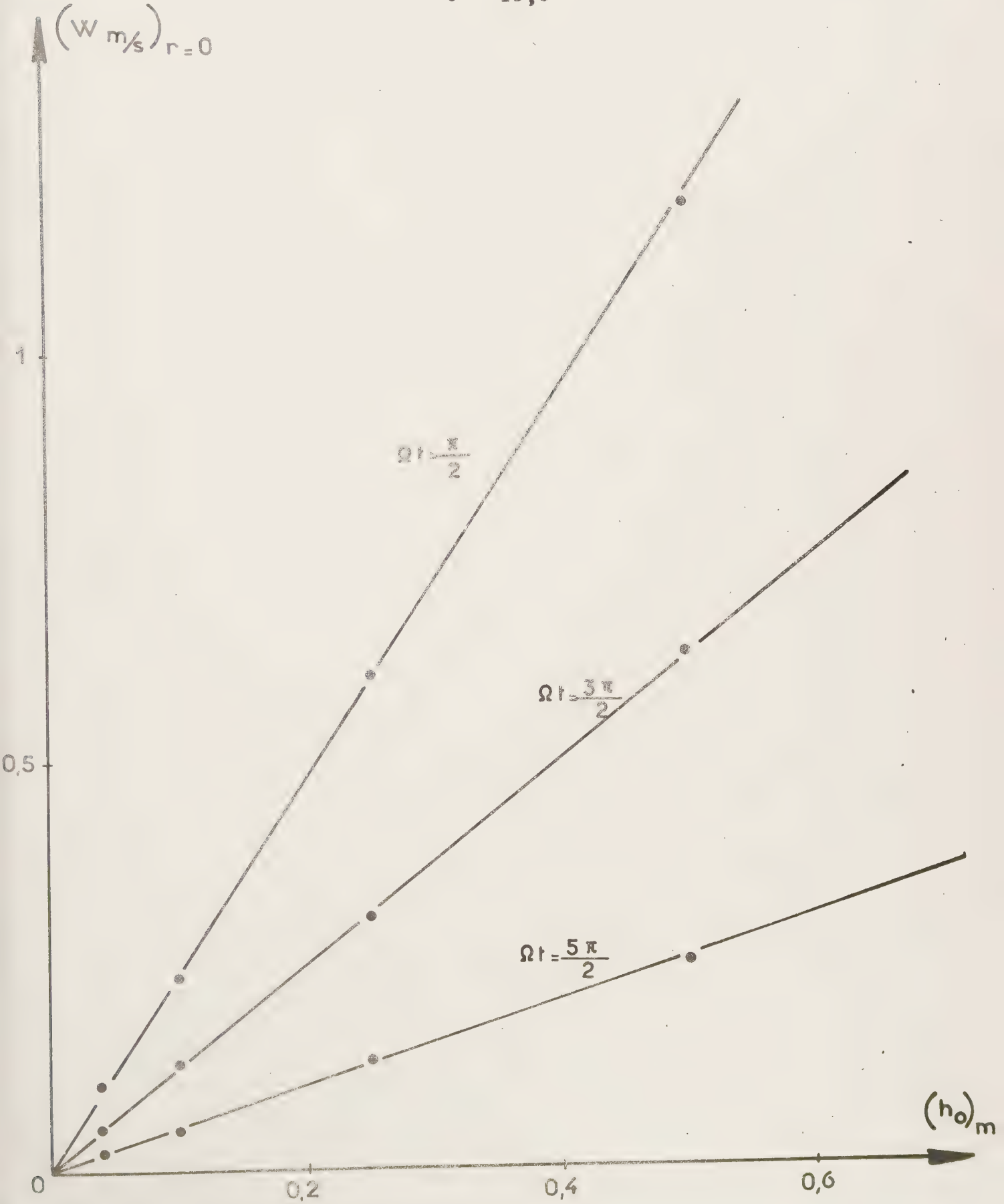
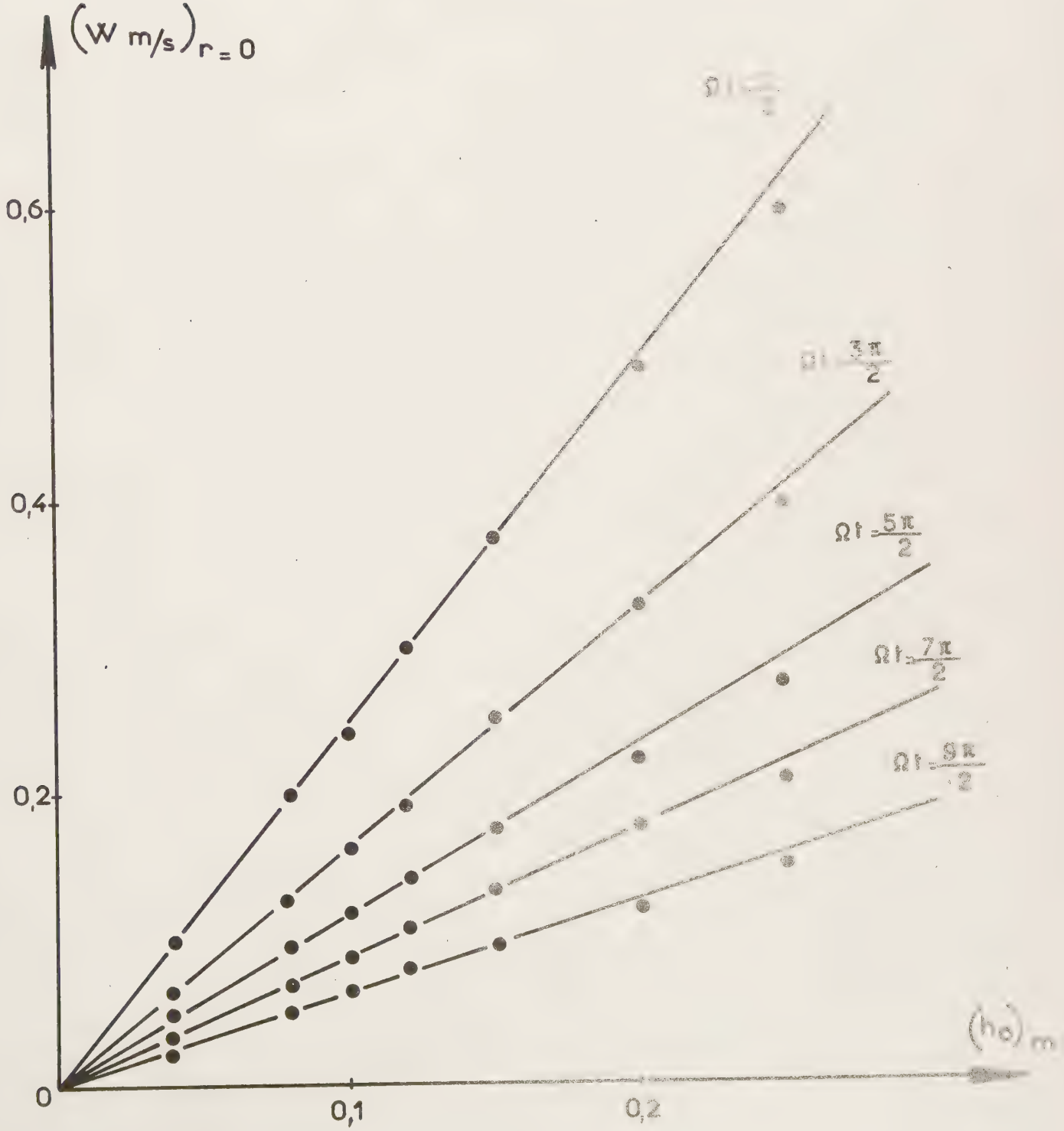


Fig.

VARIATION DE LA VITESSE INSTANTANEE EXPERIMENTALE

AU CENTRE DU TUBE EN FONCTION DE

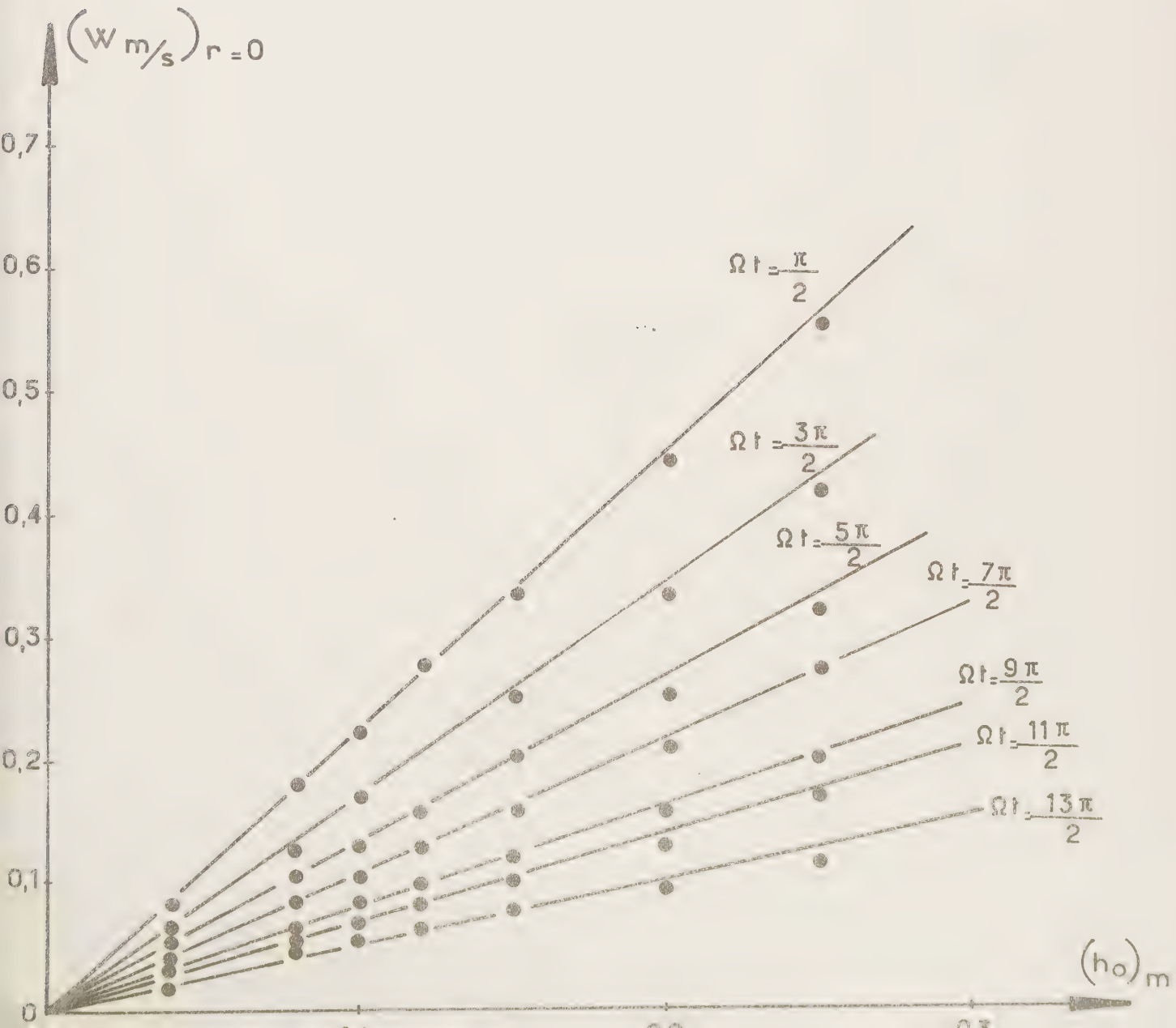
ν =



VARIATION DE LA VITESSE INSTANTANEE

EXPERIMENTALE AU CENTRE DU TUBE EN FONCTION DE h_o

$\vartheta = 138$



VARIATION DE $\frac{\delta}{R}$ EN FONCTION DE Ωt

Théorie ——— Expérience (● $\frac{h_o}{R} = 4$, × $\frac{h_o}{R} = 25$)

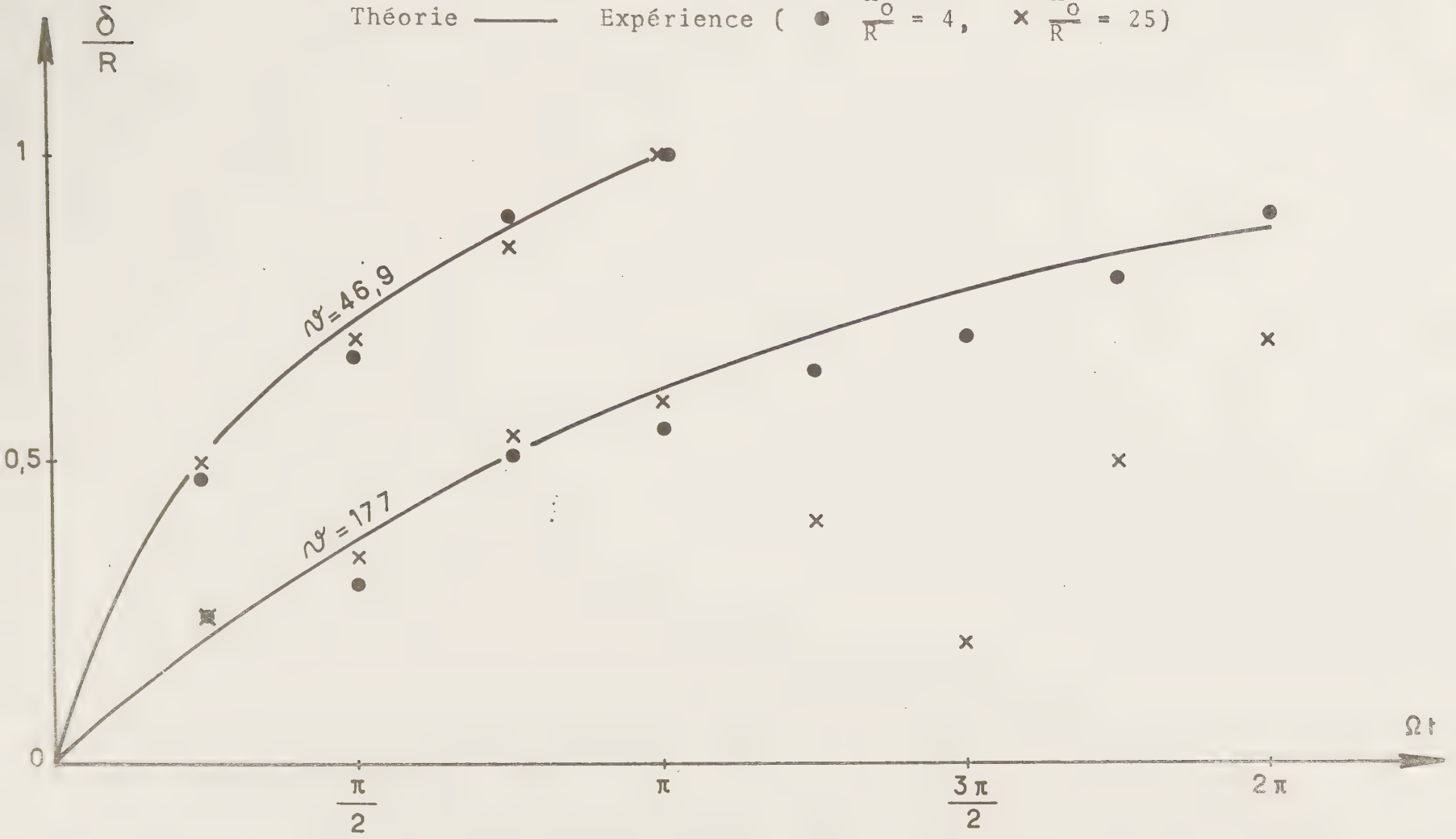


Fig. 58

VARIATION DE $\frac{\delta}{R}$ EN FONCTION DE Ωt

Théorie ——— Expérience (● $\frac{h_o}{R} = 4$, × $\frac{h_o}{R} = 25$)

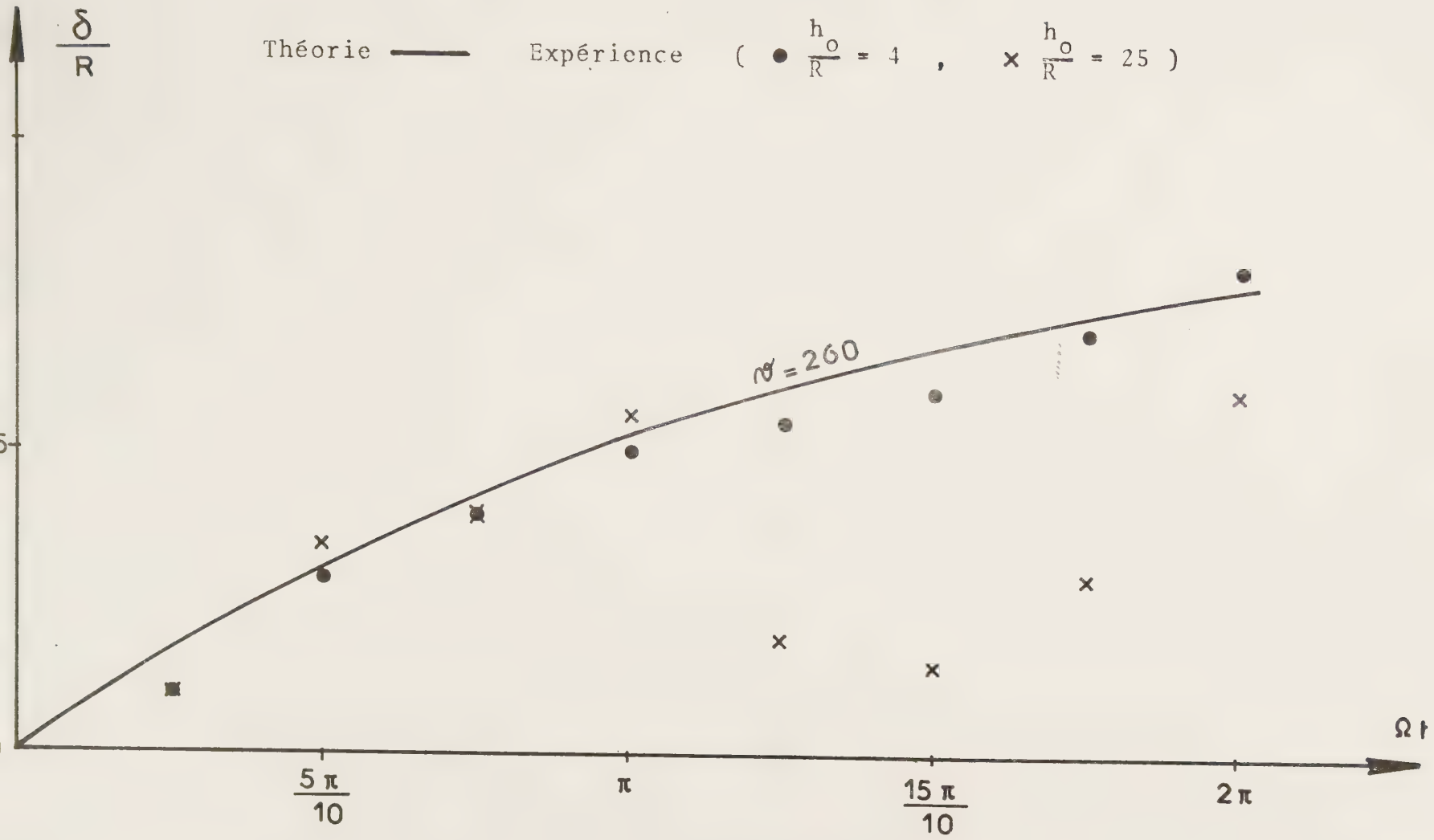
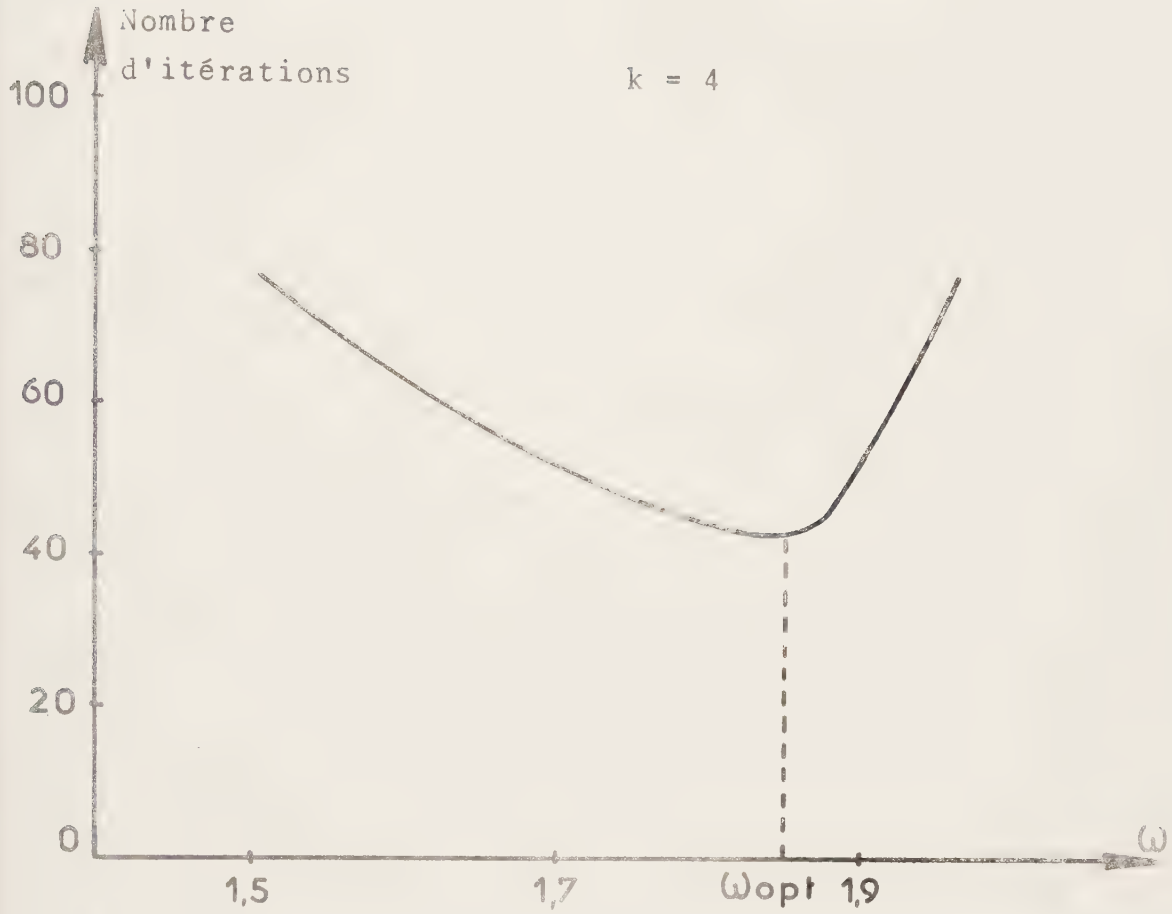


Fig. 59

VARIATION DU NOMBRE D'ITERATIONS
EN UN POINT EN FONCTION DE ω



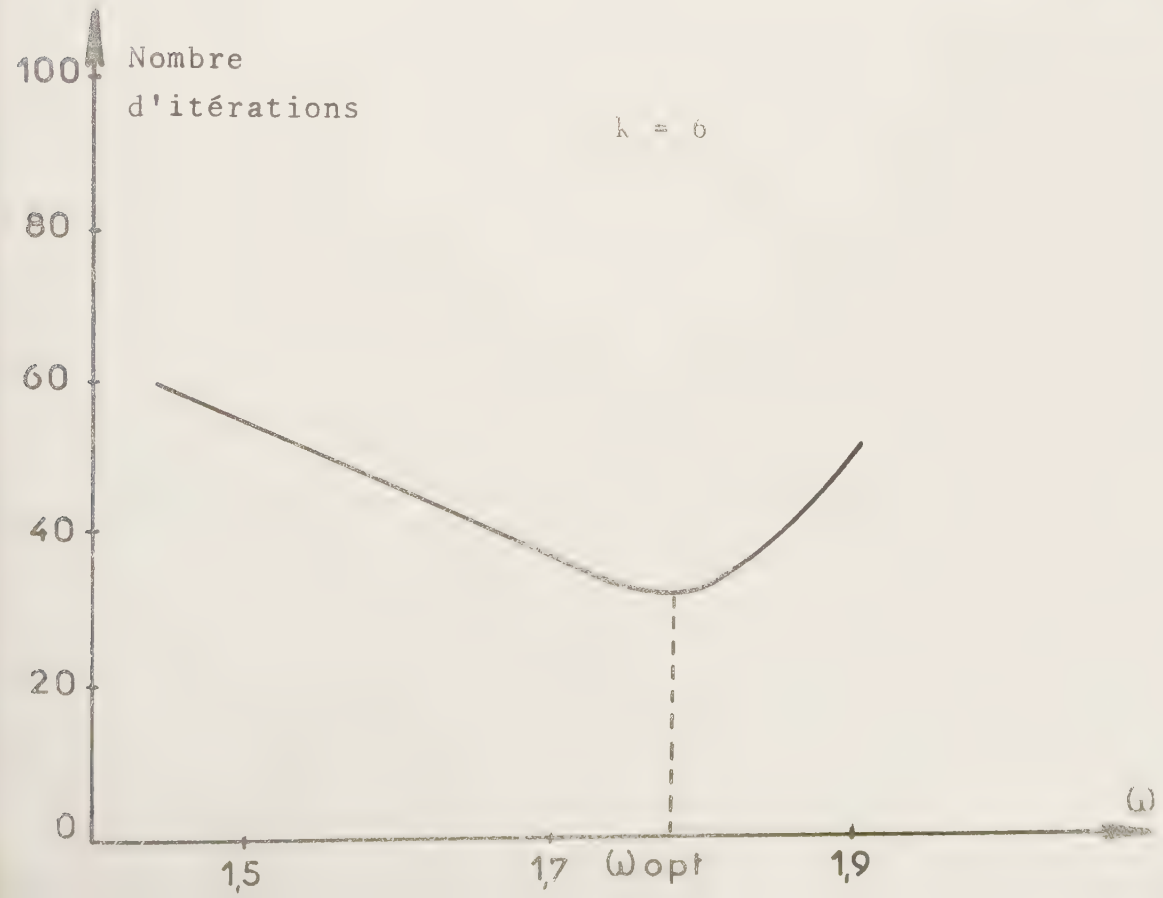
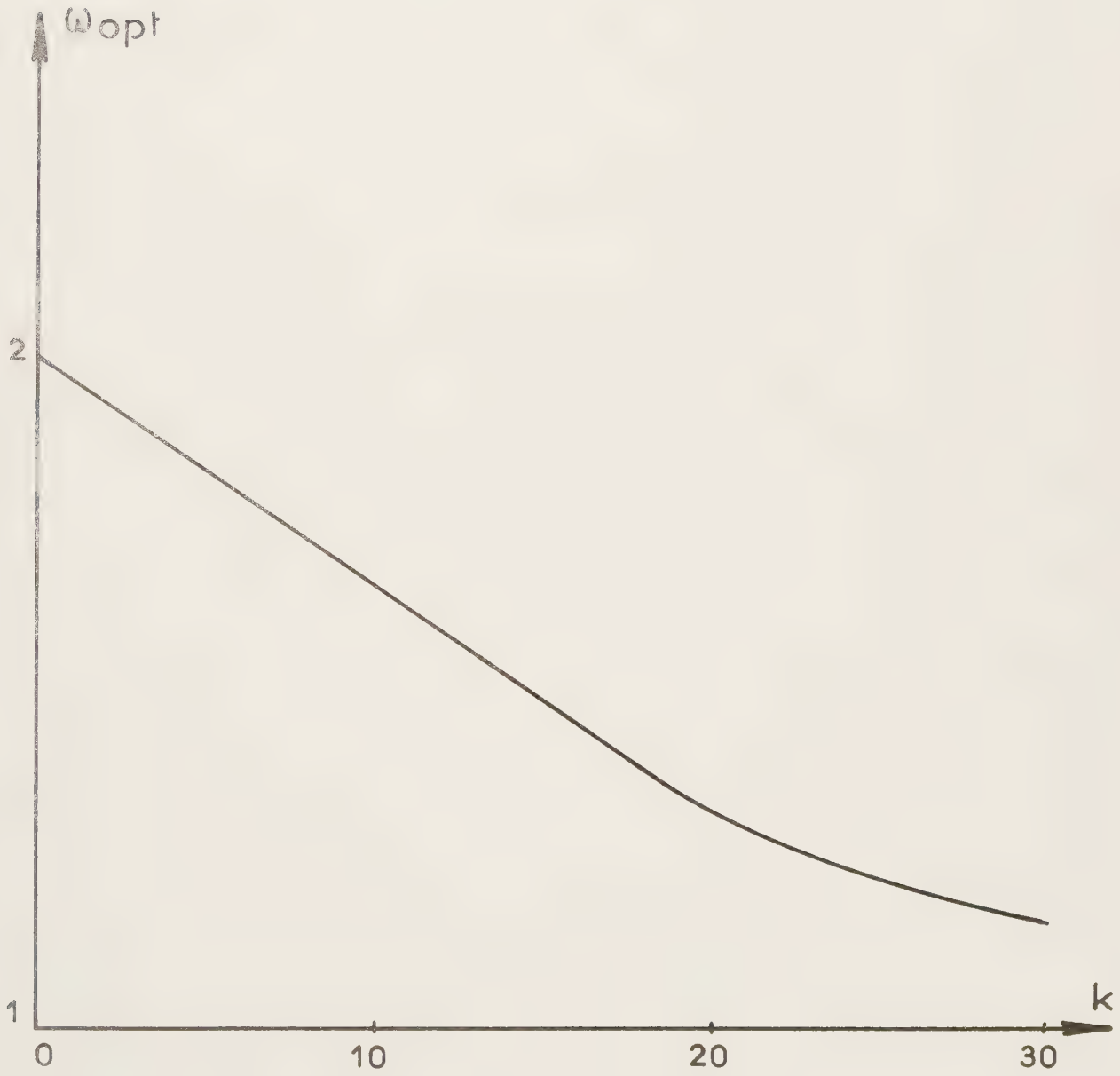


Fig. 61

VARIATION DE ω_{opt}

EN FONCTION DE k



REPARTITION DE $\frac{u}{\omega_p h_o}$ A L'INSTANT INITIAL

• $\frac{\Delta r}{R} = \frac{1}{40}$

$\omega = 1,72$

× $\frac{\Delta r}{R} = \frac{1}{80}$

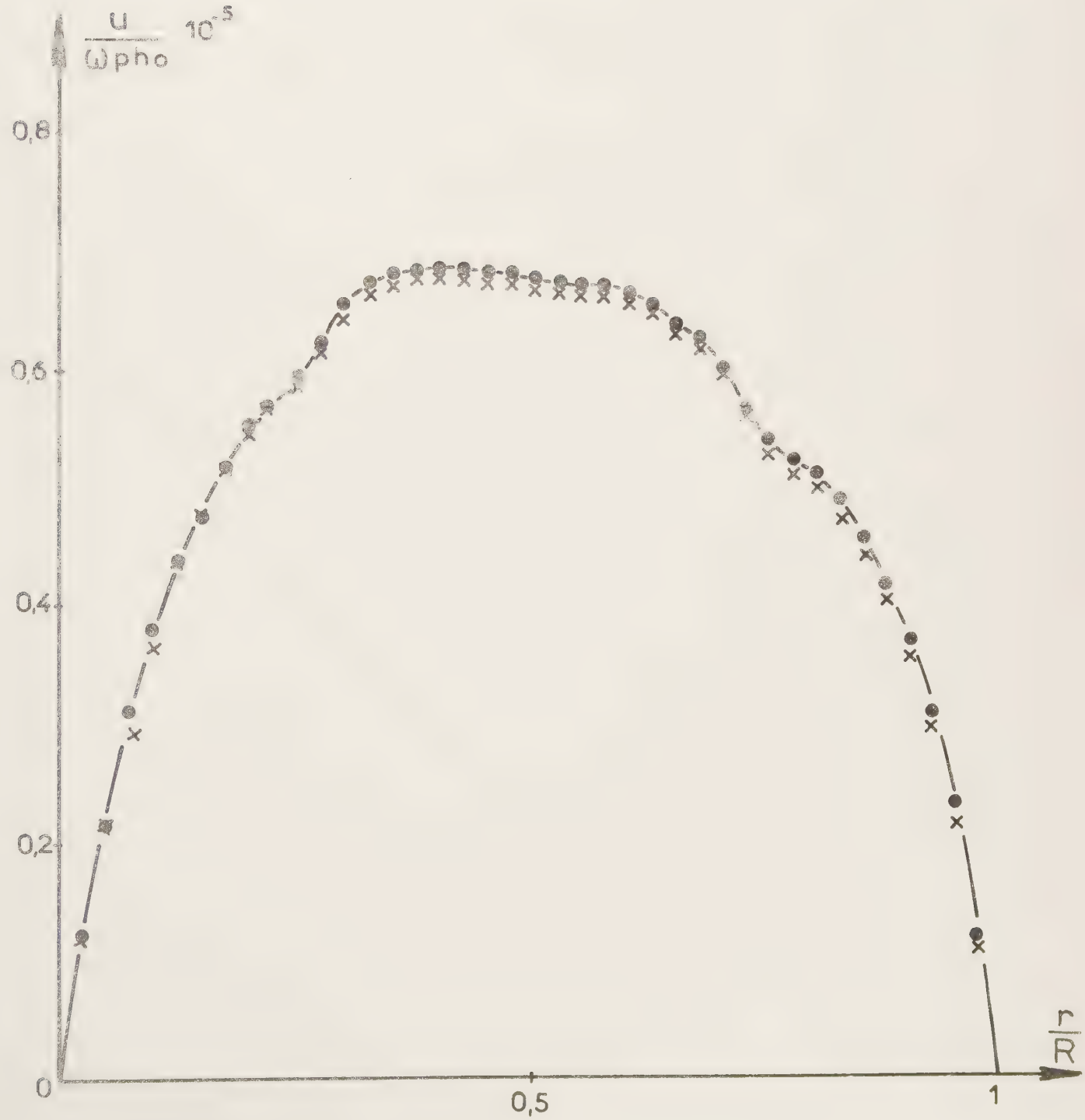


Fig. 63

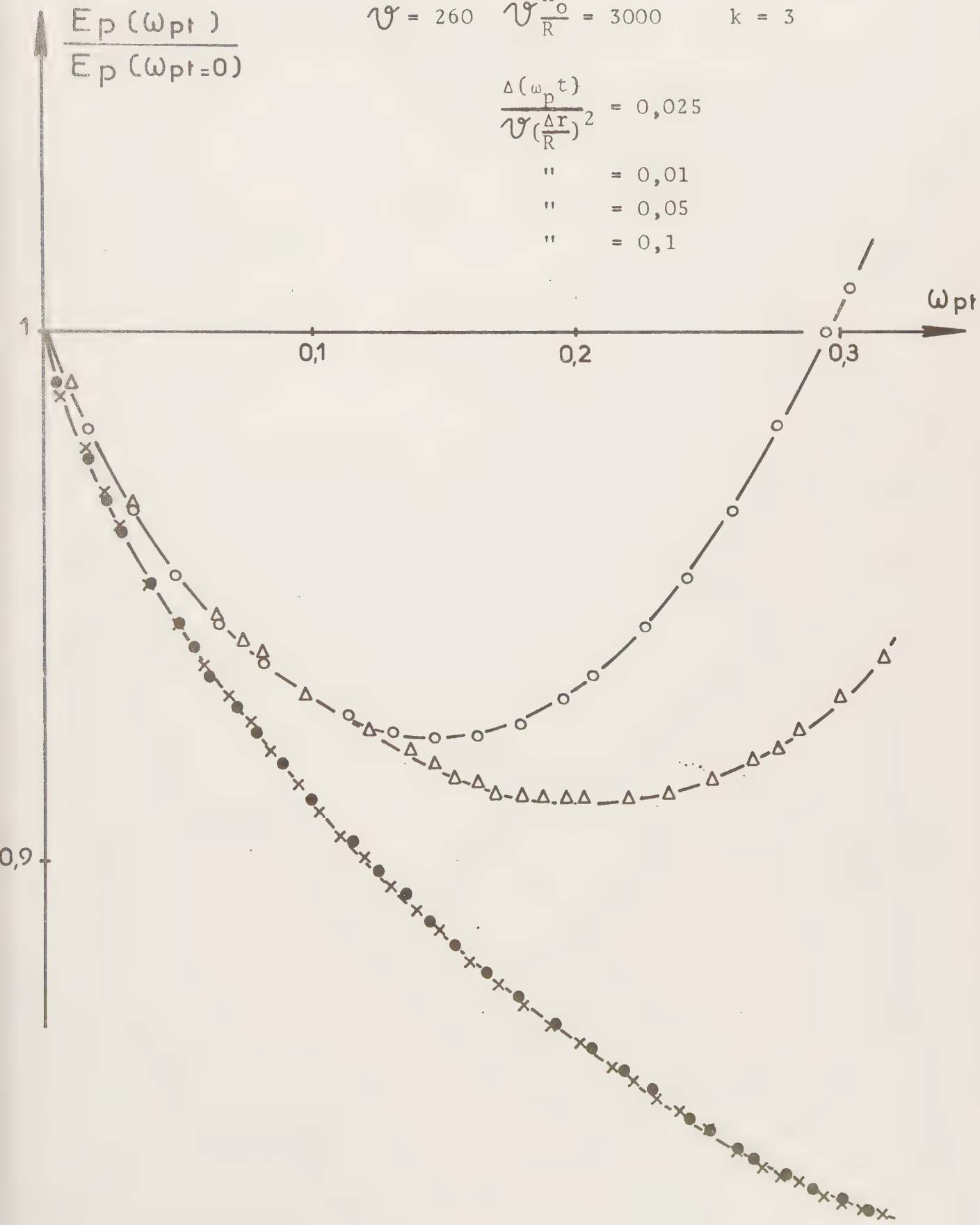

$\frac{E_p(\omega_{pt})}{E_p(\omega_{pt}=0)}$
$\vartheta = 260$ $\vartheta\frac{h_o}{R} = 3000$ k = 3
$\frac{\Delta(\omega_p t)}{\vartheta(\frac{\Delta r}{R})^2} = 0{,}025$
" = 0,01
" = 0,05
" = 0,1
ω_{pt}
1
0,1
0,2
0,3
0,9

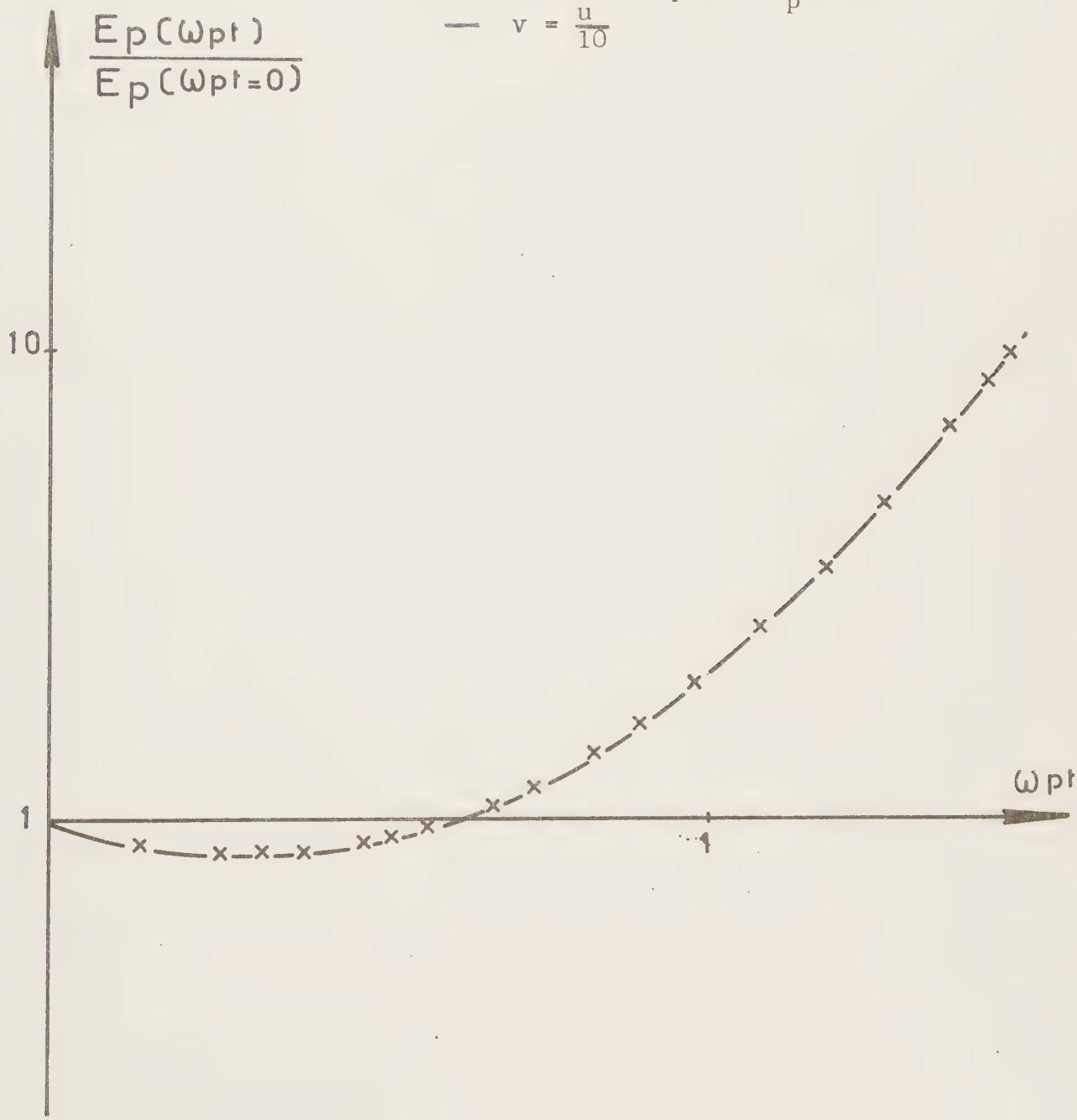
Fig. 64

$\nu = 260 \quad \nu \frac{h_o}{R} = 3000 \quad k = 3$

++ $v = u$

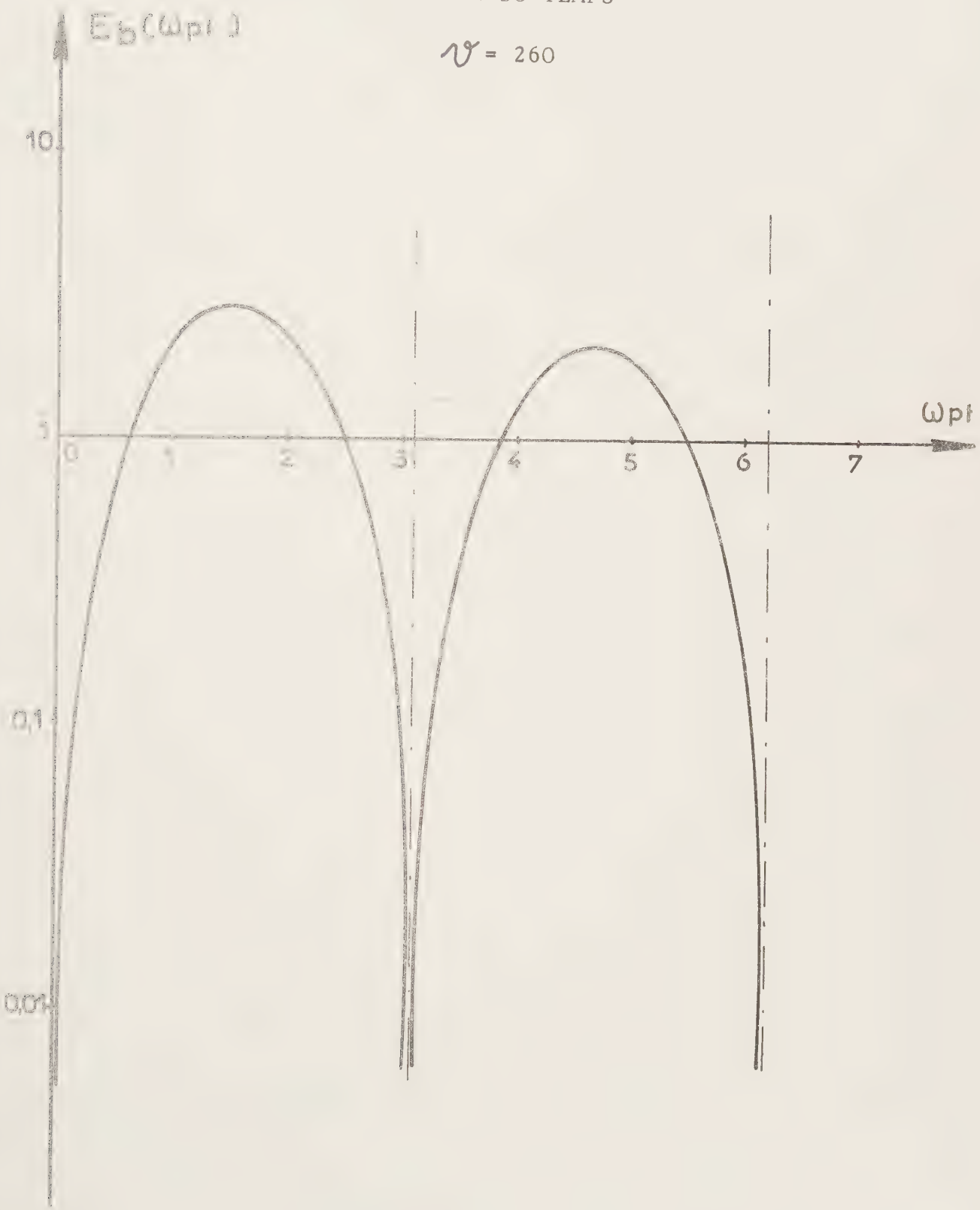
— $v = \frac{u}{10}$

pour $\omega_p t = 0$



VARIATION DE L'ENERGIE CINETIQUE
MOYENNE DE L'ECOULEMENT DE BASE EN
FONCTION DU TEMPS

$\mathcal{V}$ = 260



VARIATION DE L'ENERGIE CINETIQUE
MOYENNE DES PERTURBATIONS AU COURS
DU TEMPS

$\nu = 260$ $\nu \frac{h_o}{R} = 300$

VARIATION DE L'ENERGIE CINETIQUE
MOYENNE DES PERTURBATIONS AU COURS
DU TEMPS

$\mathcal{V} = 260 \quad \mathcal{V}\frac{h_o}{R} = 1000$

$$\frac{E_p(\omega_{pt})}{E_p(\omega_{pt}=0)}$$

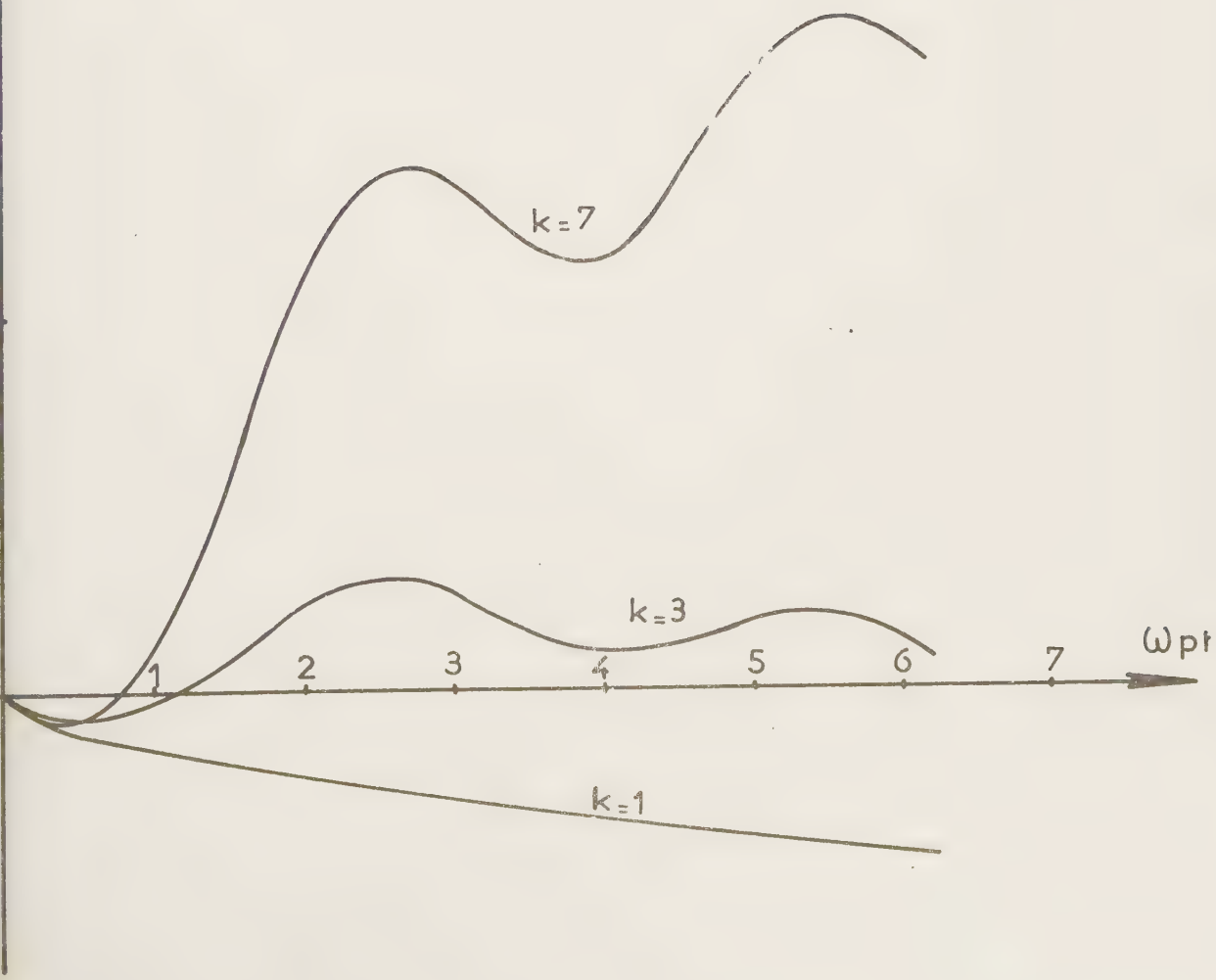
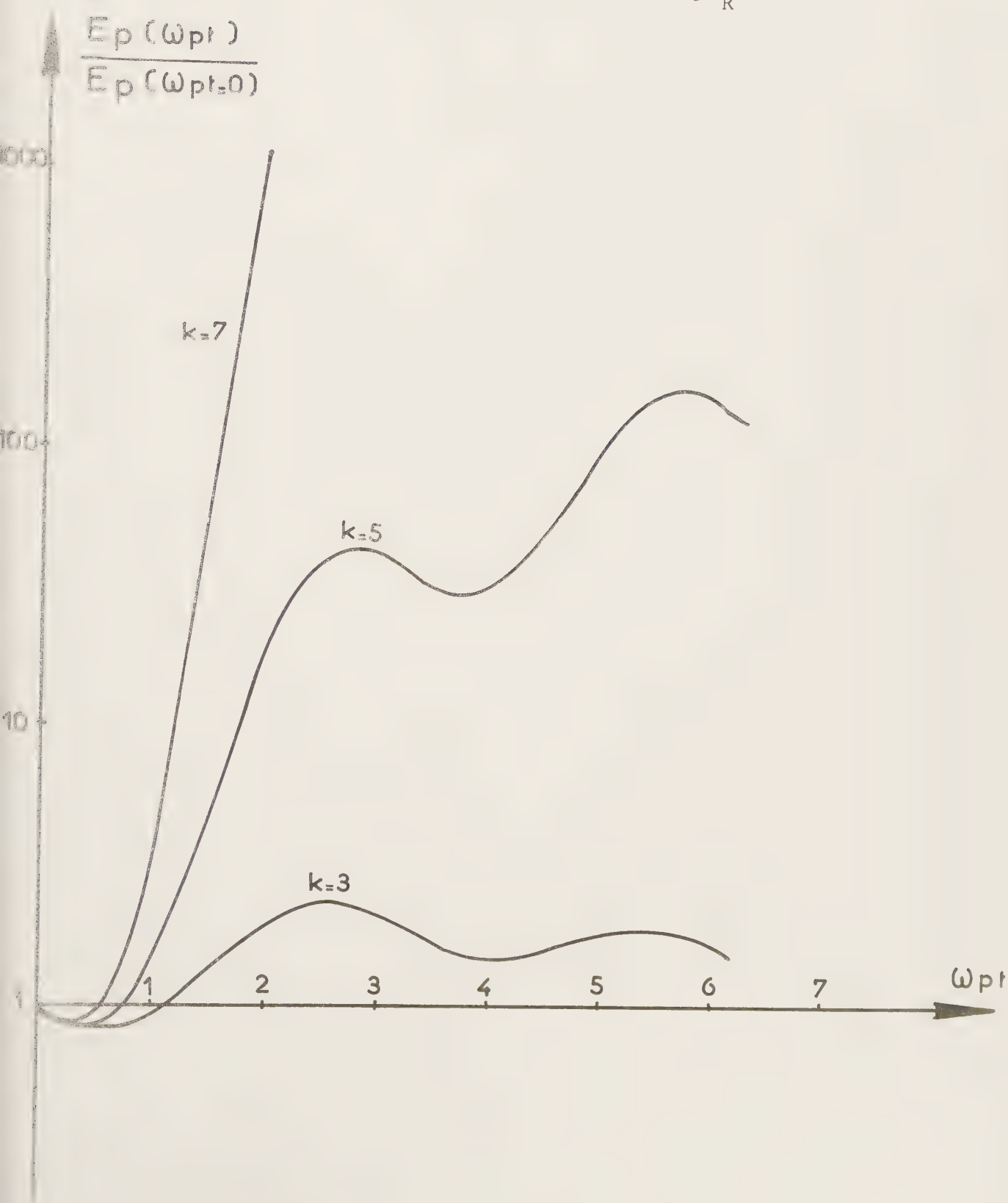


Fig.

VARIATION DE L'ENERGIE CINETIQUE MOYENNE DES PERTURBATIONS AU COURS DU TEMPS

$\mathcal{V} = 260 \qquad \mathcal{V}\frac{h_o}{R} = 1500$



VARIATION DE L'ENERGIE CINETIQUE
MOYENNE DES PERTURBATIONS AU COURS
DU TEMPS

$\frac{Ep(\omega pt)}{Ep(\omega pt=0)}$

$\vartheta = 260$ $\vartheta \frac{h_o}{R} = 4000$

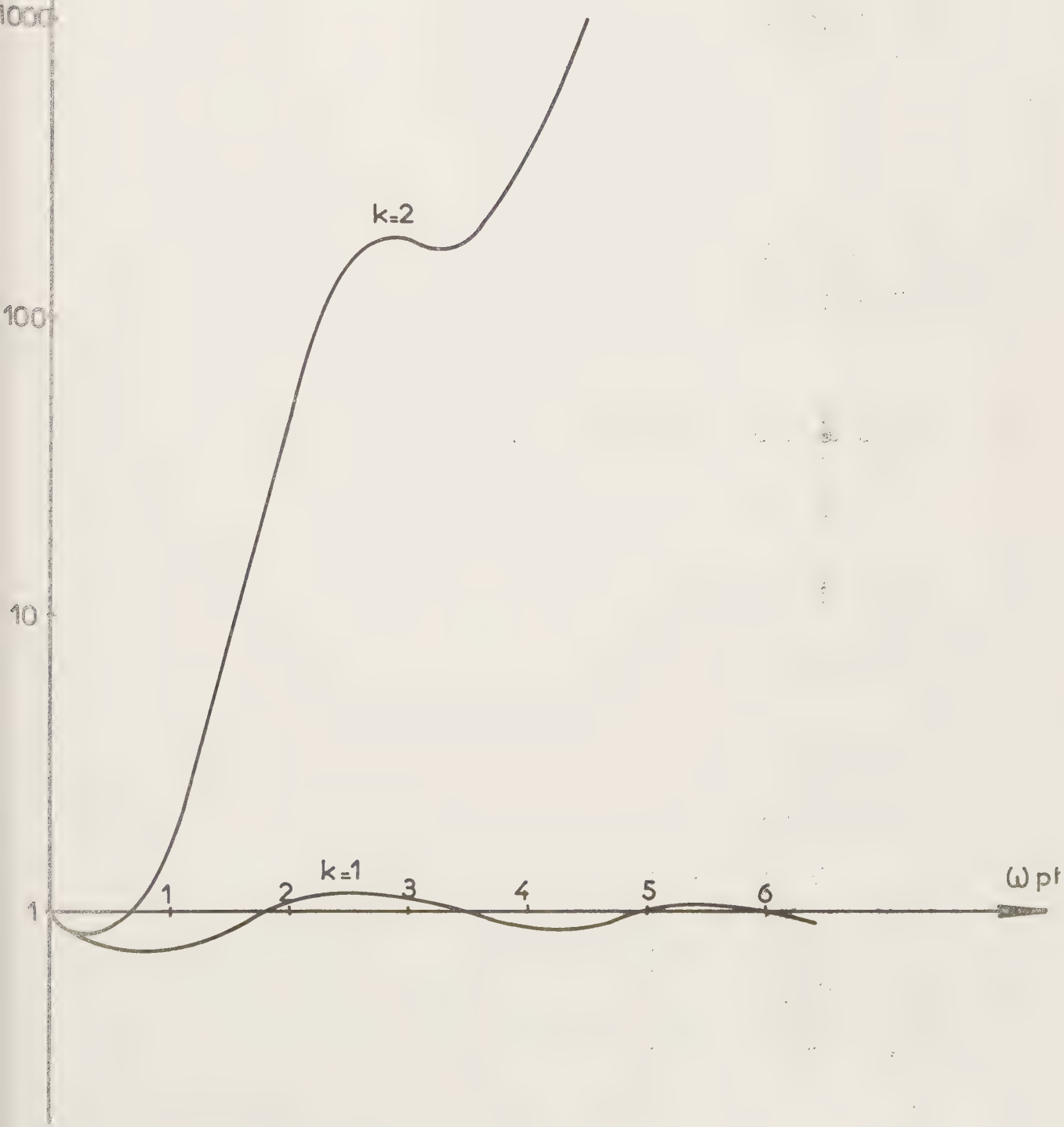
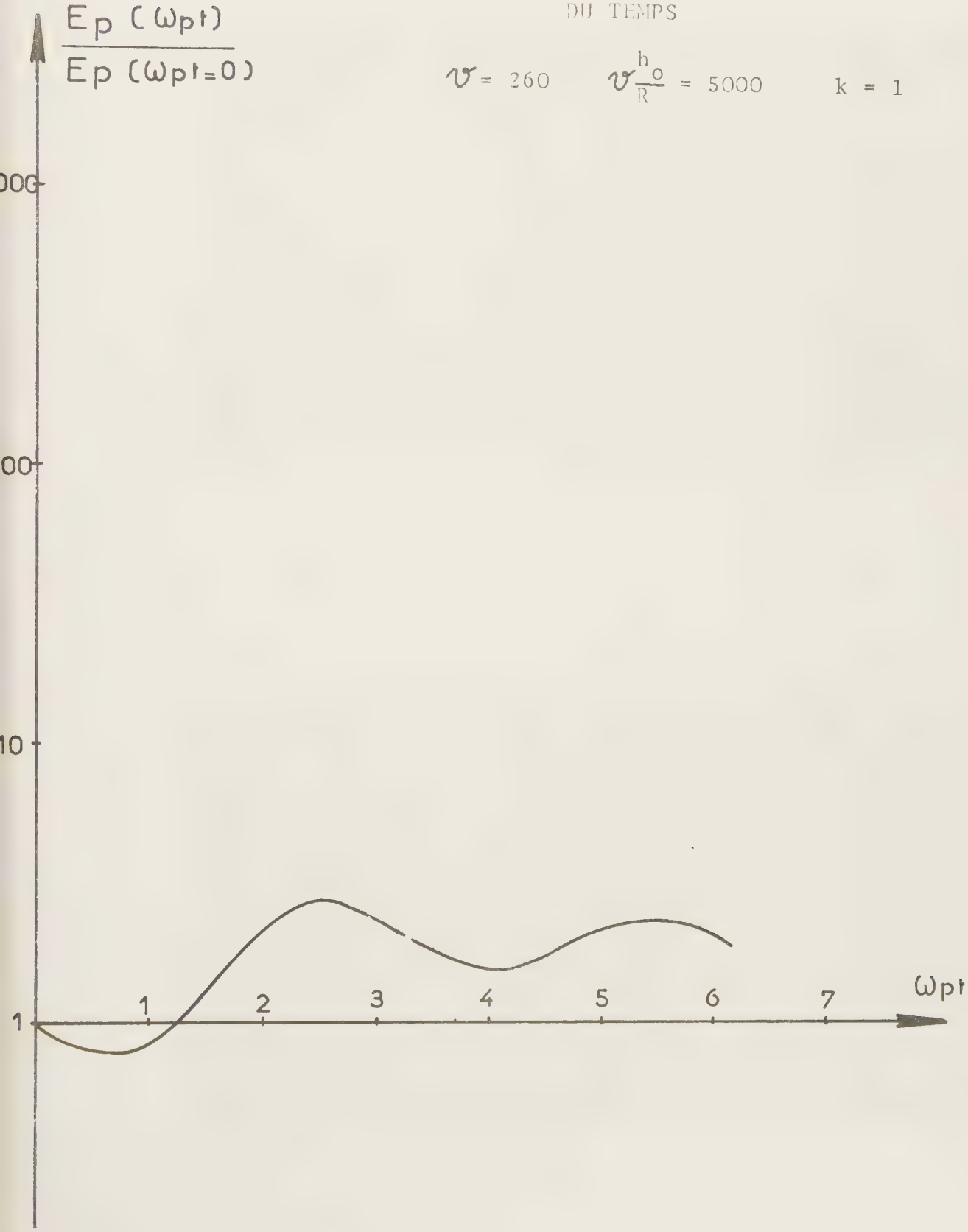


Fig. 7

VARIATION DE L'ENERGIE CI TIQUE
MOYENNE DES PERTURBATIONS . COURS
DU TEMPS

$\nu = 260$ $\nu \frac{h_o}{R} = 5000$ $k = 1$

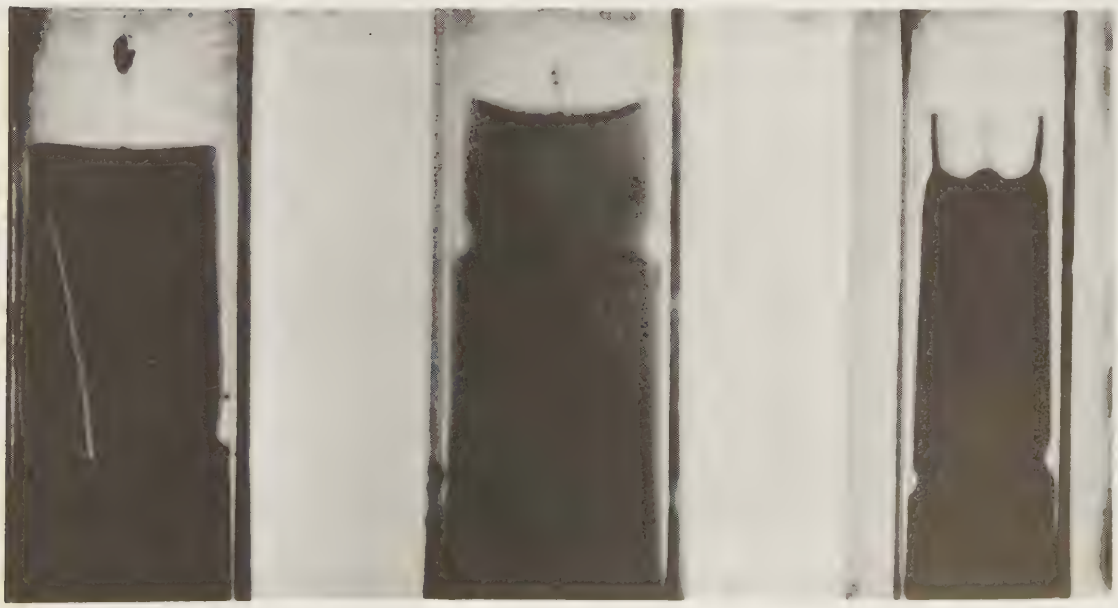


$\nu = 16,8$

$\frac{h_o}{R} = 5$

1ère MONTEE

$\frac{h_o}{R} = 2$ $\frac{h_o}{R} = 3$ $\frac{h_o}{R} = 8$



1ère DESCENTE

$\mathcal{V} = 102 \qquad \frac{h_o}{R} = 10$

1ère MONTEE

$\mathcal{V} = 260 \qquad \frac{h_o}{R} = 8$

1ère MONTEE

1ère DESCENTE

Fig. 73

$\mathcal{V} = 25$

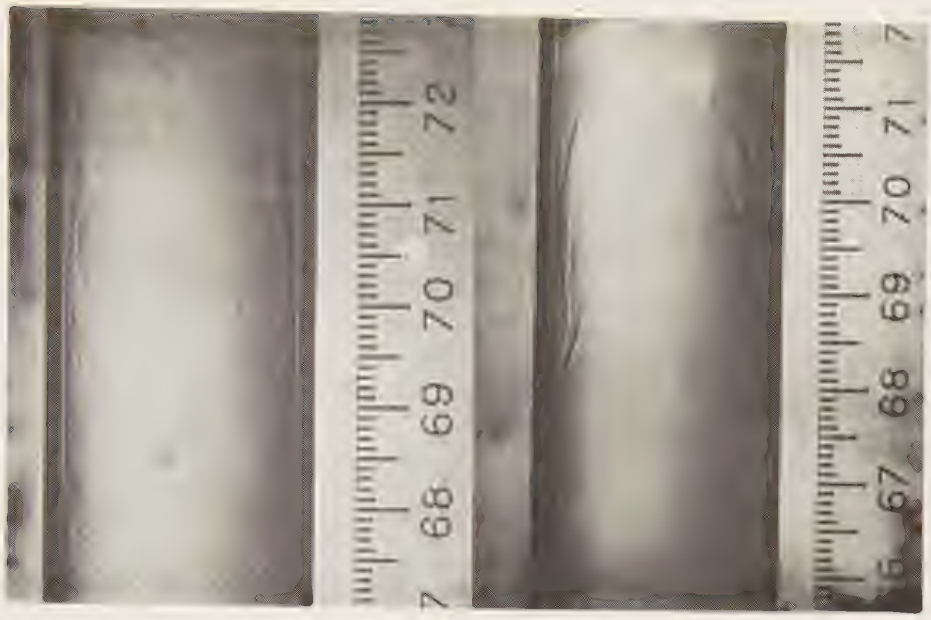
Fig. 73 a

1ere MONTEE $(\frac{h_o}{R} = 30)$

Fig. 73 b

1ère DESCENTE $(\frac{h_o}{R} = 10)$

Fig. 74



2ème MONTEE

$\frac{h_o}{R} = 9$

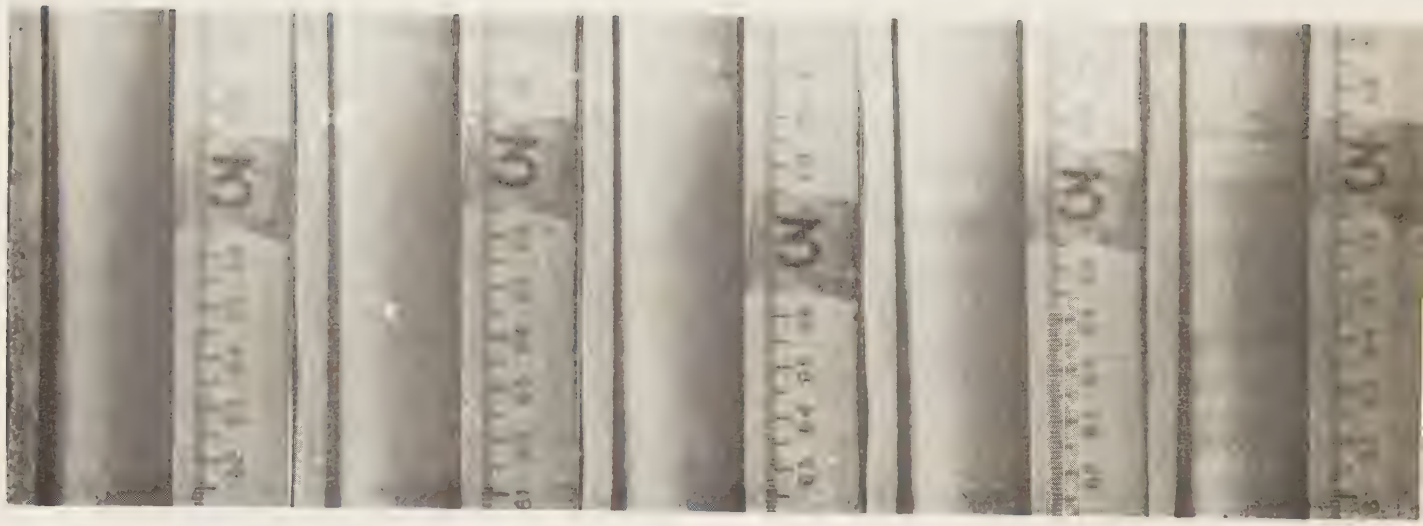
2ème MONTEE

$\frac{h_o}{R} = 20$

1ère DESCENTE

$\frac{h_o}{R} = 50$

$\mathcal{V} = 260 \qquad \frac{h_o}{R} = 4$

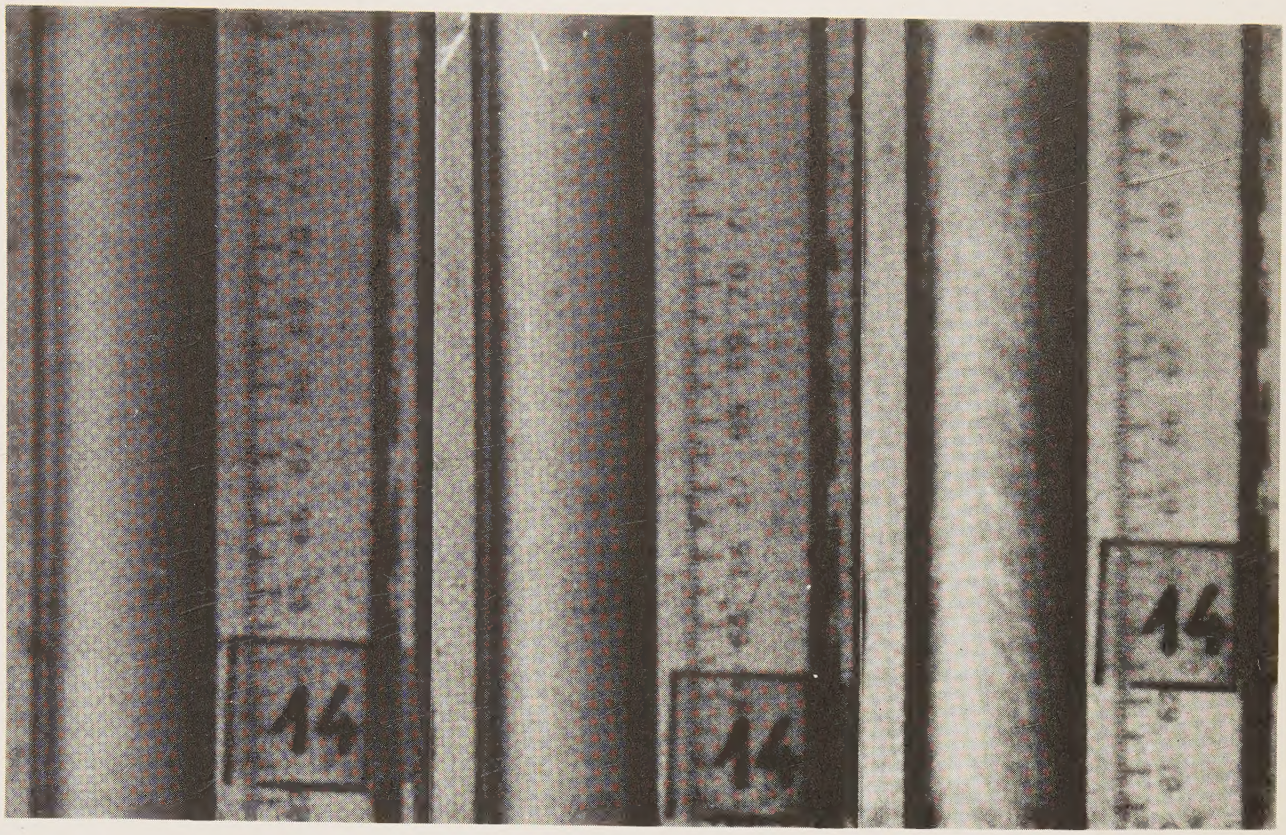


1ère MONTEE 1ère DESCENTE 2ième MONTEE 2ième DESCENTE 3ième MONTEE

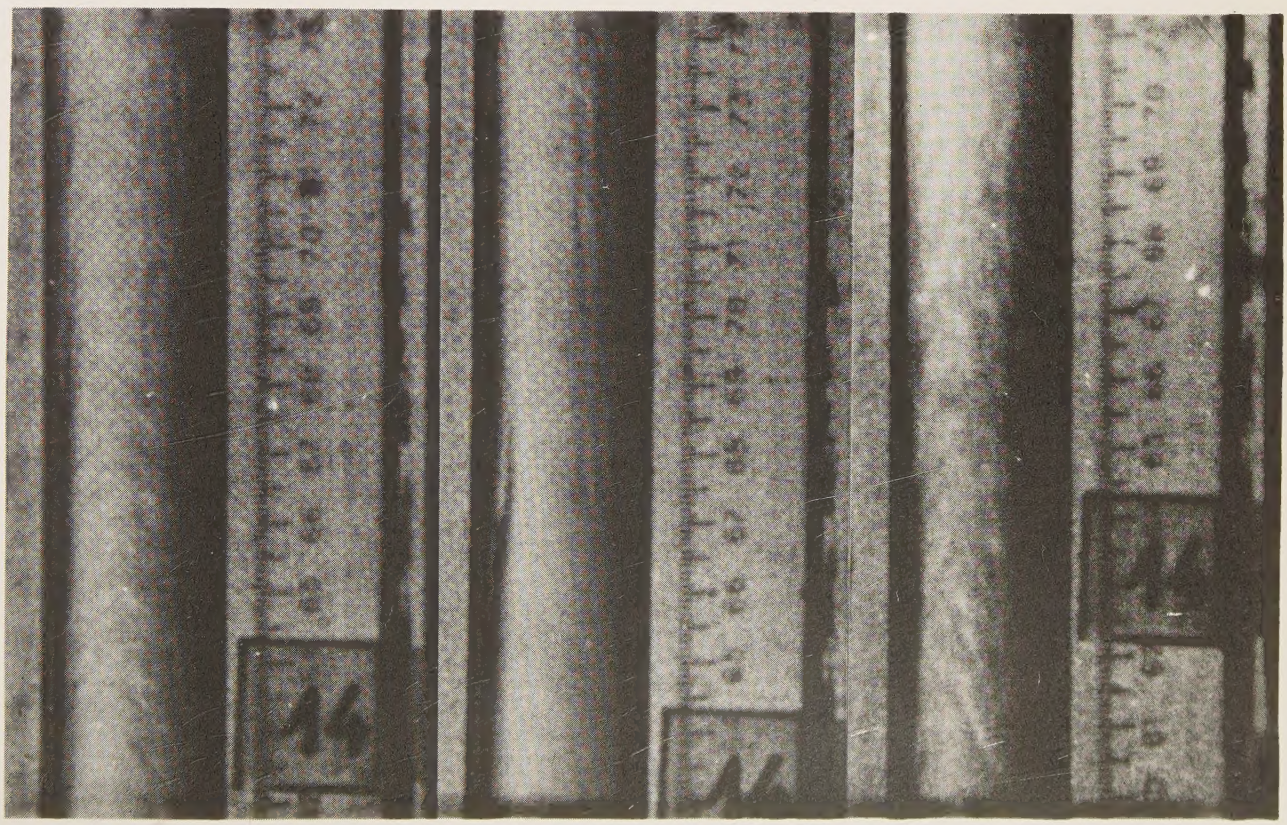
3ième MONTEE 3ième DESCENTE

3ième DESCENTE 4ième MONTEE

$\mathcal{V} = 260$ $\quad \frac{h_o}{R} = 20$



1ère MONTEE 1ère DESCENTE



2iem MONTEE 2iem DESCENTE